

2019年度(R1年度)前期
物理学基礎AI

コリオリの力と遠心力

2019年6月24日

コリオリの力と遠心力

Σ 座標系 (慣性系) に対して回転している Σ' 座標系での運動方程式は

$$m\ddot{x}' = F_x' + 2m\dot{y}'\dot{\theta} + mx'\dot{\theta}^2 + my'\ddot{\theta}$$

$$m\ddot{y}' = F_y' - 2m\dot{x}'\dot{\theta} + my'\dot{\theta}^2 - mx'\ddot{\theta}$$

右辺第2項をコリオリの力、右辺第3項を遠心力という。

$\ddot{\theta} = 0$ で、角速度 $\dot{\theta} = \omega$ が一定のときは

$$m\ddot{x}' = F_x' + 2m\dot{y}'\omega + mx'\omega^2$$

$$m\ddot{y}' = F_y' - 2m\dot{x}'\omega + my'\omega^2$$

遠心力の大きさは

$$F_c = \sqrt{(mx'\omega^2)^2 + (my'\omega^2)^2} = mr\omega^2$$

コリオリの力

Σ 座標系 (慣性系) に対して回転している Σ' 座標系では
コリオリの力

$$F_{Cor,x'} = 2m\dot{y}'\dot{\theta} = 2m\omega\dot{y}'$$

$$F_{Cor,y'} = -2m\dot{x}'\dot{\theta} = -2m\omega\dot{x}'$$

が働く。

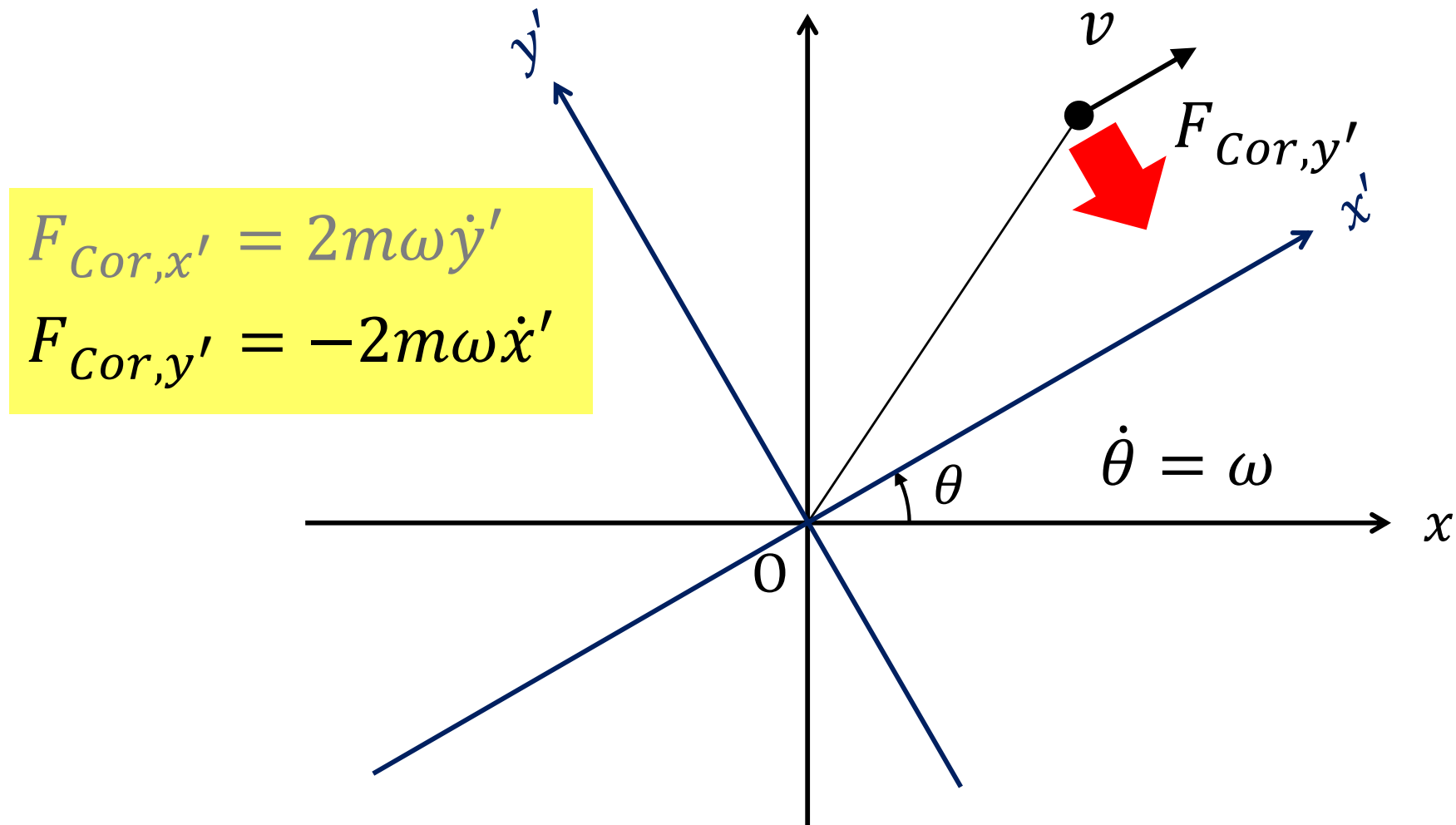
質点の速度が x' 軸方向 ($\dot{y}' = 0$) の場合は $F_{Cor,x'} = 0$ となり、コリオリの力は $-y'$ 軸方向に働く。

質点の速度が y' 軸方向 ($\dot{x}' = 0$) の場合は $F_{Cor,y'} = 0$ となり、コリオリの力は x' 軸方向に働く。

すなわち、コリオリの力は質点の進行方向に対して右向きに働く。

コリオリの力

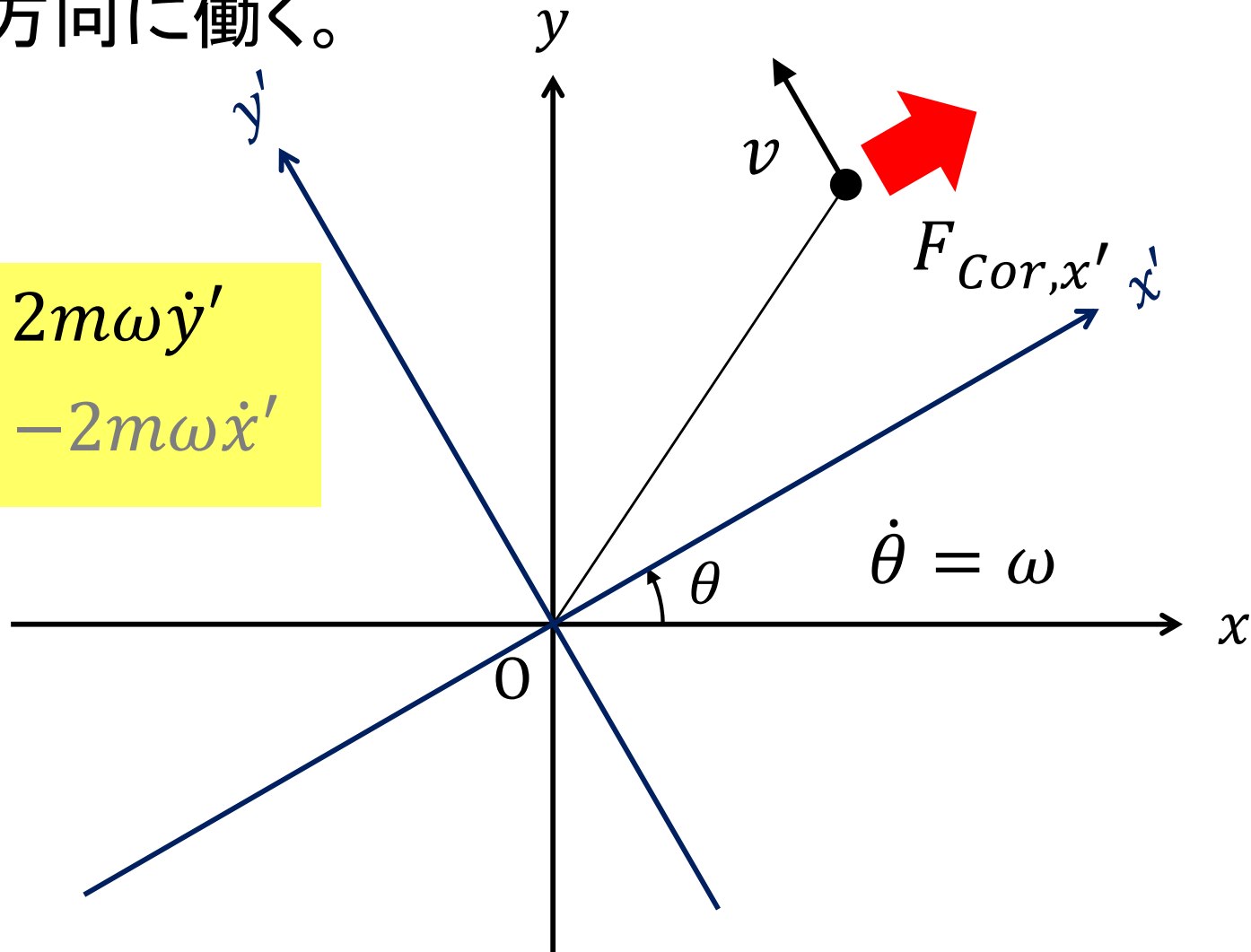
質点の速度が x' 軸方向 ($\dot{y}' = 0$) の場合、コリオリの力は $-y'$ 軸方向に働く。



コリオリの力

質点の速度が y' 軸方向 ($\dot{x}' = 0$) の場合、コリオリの力は x' 軸方向に働く。

$$F_{Cor,x'} = 2m\omega\dot{y}'$$
$$F_{Cor,y'} = -2m\omega\dot{x}'$$



遠心力

Σ 座標系 (慣性系) に対して回転している Σ' 座標系では
遠心力

$$F_{c,x'} = mx'\dot{\theta}^2 = m\omega^2 x'$$

$$F_{c,y'} = my'\dot{\theta}^2 = m\omega^2 y'$$

すなわち

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2 \mathbf{r}'$$

が働く。

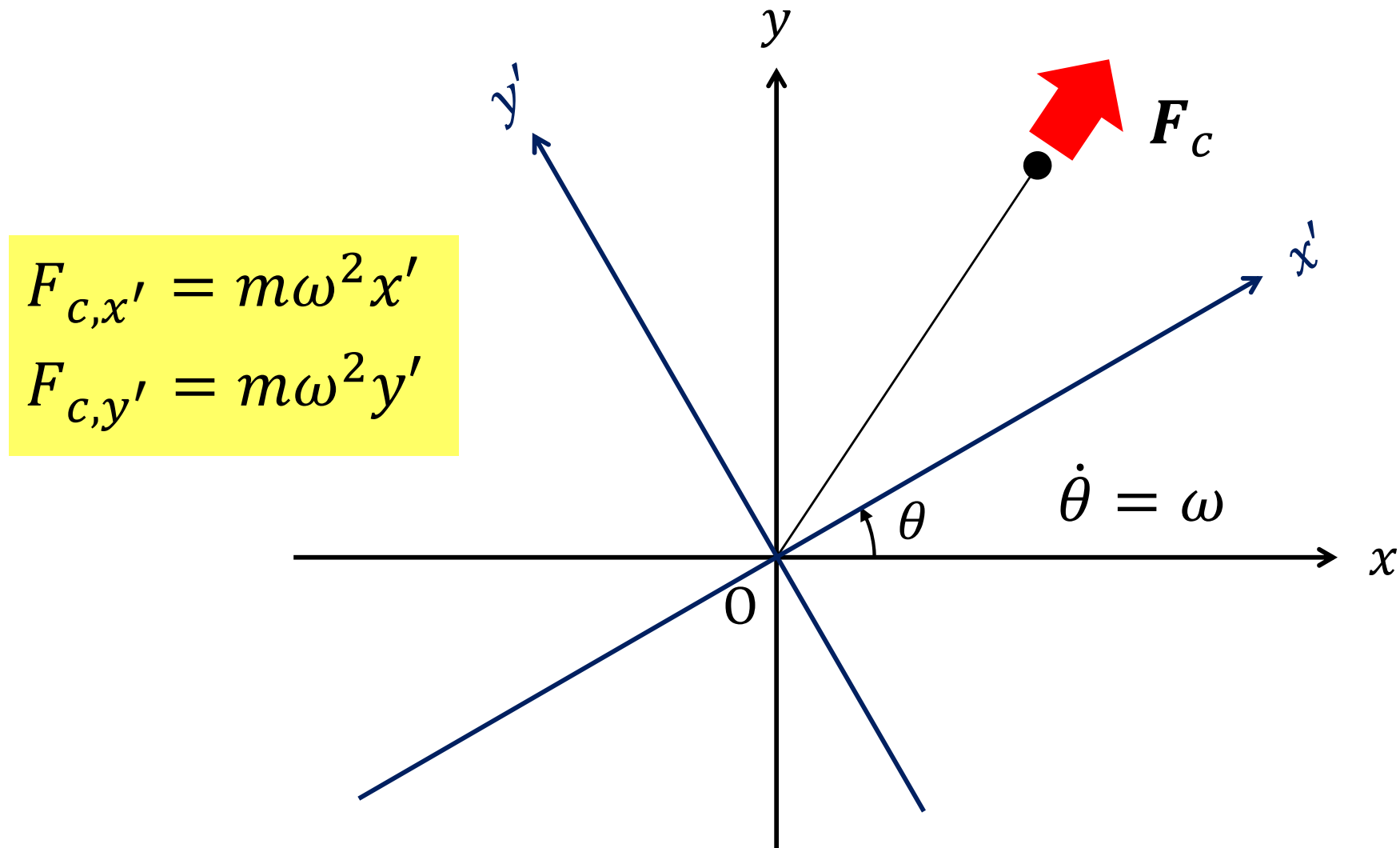
遠心力の向きは回転中心から遠ざかる向きで、その大きさは

$$F_c = \sqrt{(mx'\omega^2)^2 + (my'\omega^2)^2} = mr\omega^2$$

である。

遠心力

遠心力の向きは回転中心から遠ざかる向きである。



遠心力

Σ 座標系 (慣性系) の原点のまわりを一定の角速度 $\dot{\theta} = \omega$ で回転している Σ' 座標系の加速度は、半径 r の円周上を等速円運動する質点の加速度と同じであり、

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

である。

したがって、遠心力

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2 \mathbf{r}'$$

は、 Σ 座標系 (慣性系) に対して加速度 $\mathbf{a}$ で運動している Σ' 座標系における慣性力 $-\mathbf{ma}$ に相当する。

円運動

質点が半径 R の円周上を運動するとき、質点の位置ベクトルが x 軸となす角度を θ とすると

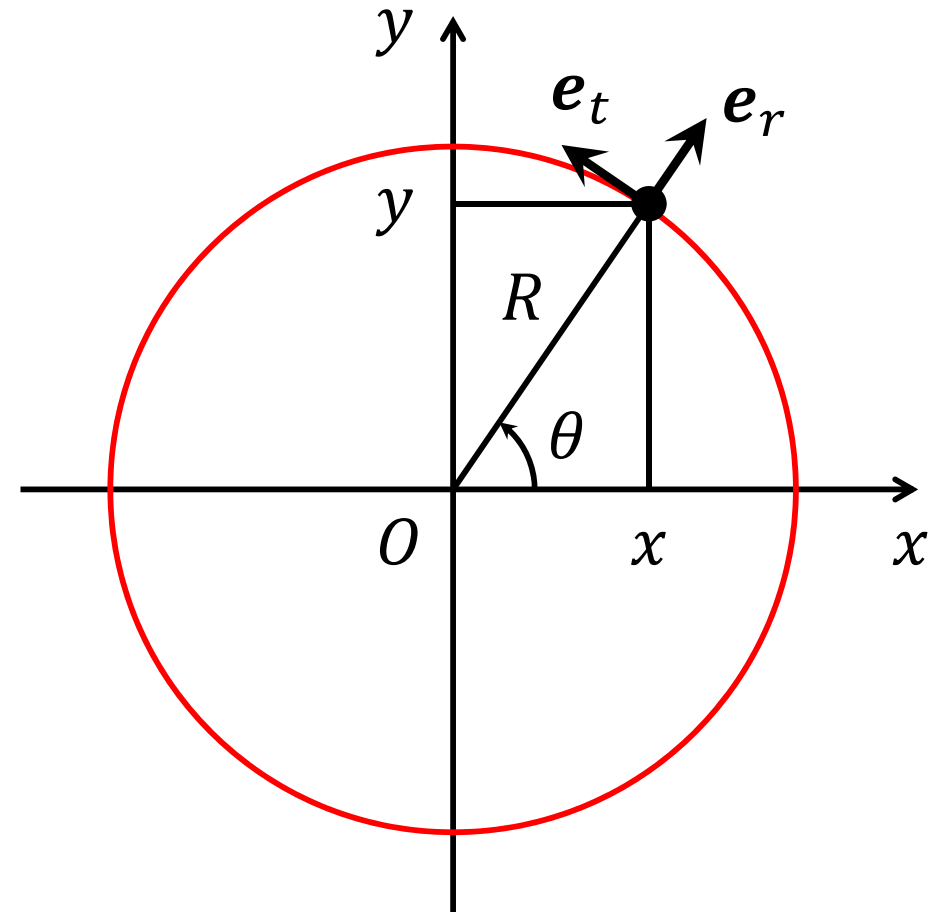
$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

となる。このとき、円周上の質点の位置は角度 θ のみで表される。 θ の時間微分

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

を**角速度**という。



等速円運動

角速度 $\dot{\theta} = \omega$ が一定のとき、 $t = 0$ で $\theta = 0$ とすると

$$\theta = \omega t$$

となるから、円運動の速度 v の各成分は

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cos \omega t) = -R\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(R \sin \omega t) = R\omega \cos \omega t$$

である。したがって、

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

となる。

等速円運動

角速度 $\dot{\theta} = \omega$ が一定のとき、加速度 a の各成分は

$$a_x = \frac{d}{dt}(-R\omega \sin \omega t) = -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

$$a_y = \frac{d}{dt}(R\omega \cos \omega t) = -R\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$$

である。したがって、加速度の向きは円の中心方向で

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r} = -R\omega^2 \mathbf{e}_r$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 = \frac{(R\omega)^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

となる。

一般の円運動

角速度 $\dot{\theta} = \omega$ が時間に依存するとき

$$a_x = \frac{d}{dt}(-R\dot{\theta} \sin \theta) = -R\dot{\theta}^2 \cos \theta - R\ddot{\theta} \sin \theta$$

$$a_y = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta} \cos \theta) = -R\dot{\theta}^2 \sin \theta + R\ddot{\theta} \cos \theta$$

である。したがって、円の法線方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$ 、接線方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_t$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -R\dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + R\ddot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -R\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + R\ddot{\theta} \mathbf{e}_t \end{aligned}$$

となる。

慣性力

Σ 座標系 (慣性系) に対する Σ' 座標系の回転の角速度 $\dot{\theta} = \omega$ が一定でない場合、 Σ' 座標系では、遠心力に加えて、見かけの力

$$F_{i,x'} = my'\ddot{\theta}$$

$$F_{i,y'} = -mx'\ddot{\theta}$$

が働く。

これは、 Σ 座標系 (慣性系) に対して加速度 a で運動している Σ' 座標系における慣性力 $-ma$ に相当する。