

部分分数分解

渡邊 俊夫

問題

次の式を部分分数分解しなさい。

$$(1) \quad \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

$$(2) \quad \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

$$(3) \quad \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

問題(つづき)

$$(4) \quad \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - \beta)}$$

$$(5) \quad \frac{z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)}$$

$$(6) \quad \frac{z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)}$$

問題(つづき)

$$(7) \quad \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}$$

$$(8) \quad \frac{z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}$$

$$(9) \quad \frac{z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}$$

$$(10) \quad \frac{z^3}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}$$

$$(1) \quad \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta}$$

両辺に $z - \alpha$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{1}{z - \beta} = A + B \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad \therefore \frac{1}{\alpha - \beta} = A$$

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{1}{z - \alpha} = A \frac{z - \beta}{z - \alpha} + B \quad \therefore \frac{1}{\beta - \alpha} = B$$

したがって

$$\frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right)$$

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta}$$

$z = \alpha$ における留数は

$$A = \text{Res}[f(z), \alpha] = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{z - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

$z = \beta$ における留数は

$$B = \text{Res}[f(z), \beta] = \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

したがって

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right)$$

別解2

通分したときの係数を合わせればよい

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} &= \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{(z-\beta) - (z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\alpha - \beta}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}\end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

両辺に $z - \alpha$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z}{z-\beta} = A + B \frac{z-\alpha}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = A$$

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z}{z-\alpha} = A \frac{z-\beta}{z-\alpha} + B \quad \therefore \frac{\beta}{\beta-\alpha} = B$$

したがって

$$\frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{z-\alpha} - \frac{\beta}{z-\beta} \right)$$

$$(2) \quad f(z) = \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta}$$

$z = \alpha$ における留数は

$$A = \text{Res}[f(z), \alpha] = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z}{z - \beta} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$$

$z = \beta$ における留数は

$$B = \text{Res}[f(z), \beta] = \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{z}{z - \alpha} = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$$

したがって

$$f(z) = \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{z - \alpha} - \frac{\beta}{z - \beta} \right)$$

別解2

通分したときの係数を合わせればよい

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)} &= \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{\alpha(z-\beta) - \beta(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{z-\alpha} - \frac{\beta}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{z - \alpha} - \frac{\beta}{z - \beta} \right) &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\alpha(z - \beta) - \beta(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(\alpha - \beta)z}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)}\end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + C$$

両辺に $z - \alpha$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^2}{z-\beta} = A + B \frac{z-\alpha}{z-\beta} + C(z-\alpha) \quad \therefore \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} = A$$

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z^2}{z-\alpha} = A \frac{z-\beta}{z-\alpha} + B + C(z-\beta) \quad \therefore \frac{\beta^2}{\beta-\alpha} = B$$

したがって

$$\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right) + C$$

解(つづき)

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right) + C \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{\alpha^2(z-\beta) - \beta^2(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)} + C \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)z - (\alpha - \beta)\alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)} + C \\ &= \frac{(\alpha + \beta)z - \alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)} + C \\ &= \frac{(\alpha + \beta)z - \alpha\beta + C(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\alpha)(z-\beta)} \quad \therefore C = 1\end{aligned}$$

解(つづき)

以上より

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right) + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta} + C$$

$z = \alpha$ における留数は

$$A = \text{Res}[f(z), \alpha] = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z^2}{z - \beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}$$

$z = \beta$ における留数は

$$B = \text{Res}[f(z), \beta] = \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{z^2}{z - \alpha} = \frac{\beta^2}{\beta - \alpha}$$

したがって

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^2}{z - \alpha} - \frac{\beta^2}{z - \beta} \right) + C, \quad \text{以下同様}$$

別解2

分母と分子の次数が同じなので、まず定数項を求める

$$(3) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{(z-\alpha)(z-\beta) + (\alpha+\beta)z - \alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$
$$= 1 + \frac{(\alpha+\beta)z - \alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)} = 1 + \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$\therefore \frac{(\alpha+\beta)z - \alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

両辺に $z-\alpha$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{(\alpha+\beta)z - \alpha\beta}{z-\beta} = A + B \frac{z-\alpha}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} = A$$

別解2(つづき)

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{(\alpha + \beta)z - \alpha\beta}{z - \alpha} = A \frac{z - \beta}{z - \alpha} + B \quad \therefore \frac{\beta^2}{\beta - \alpha} = B$$

したがって

$$\frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta)} = 1 + \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^2}{z - \alpha} - \frac{\beta^2}{z - \beta} \right)$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} &= \frac{(z-\alpha)(z-\beta) + (\alpha+\beta)z - \alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\&= 1 + \frac{(\alpha+\beta)z}{(z-\alpha)(z-\beta)} - \frac{\alpha\beta}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\&= 1 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{z-\alpha} - \frac{\beta}{z-\beta} \right) \\&\quad - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right) \\&= 1 + \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha z}{z-\alpha} - \frac{\beta z}{z-\beta} \right) \\&= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha(z-\alpha) + \alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta(z-\beta) + \beta^2}{z-\beta} \right) \\&= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \beta - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right) \\&= 1 + \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha^2}{z-\alpha} - \frac{\beta^2}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(3) \quad 1 + \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^2}{z - \alpha} - \frac{\beta^2}{z - \beta} \right) &= 1 + \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^2(z - \beta) - \beta^2(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= 1 + \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)z - (\alpha - \beta)\alpha\beta}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= 1 + \frac{(\alpha + \beta)z - \alpha\beta}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{(z - \alpha)(z - \beta) + (\alpha + \beta)z - \alpha\beta}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta)}\end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} = \frac{A}{(z - \alpha)^2} + \frac{B}{z - \alpha} + \frac{C}{z - \beta}$$

両辺に $(z - \alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{1}{z - \beta} = A + B(z - \alpha) + C \frac{(z - \alpha)^2}{z - \beta} \quad \therefore \frac{1}{\alpha - \beta} = A$$

両辺に $(z - \alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$-\frac{1}{(z - \beta)^2} = B + C \frac{2(z - \alpha)(z - \beta) - (z - \alpha)^2}{(z - \beta)^2}$$

$$\therefore -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

解(つづき)

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{1}{(z - \alpha)^2} = A \frac{z - \beta}{(z - \alpha)^2} + B \frac{z - \beta}{z - \alpha} + C \quad \therefore \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} = C$$

以上より

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(-\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{\alpha - \beta}{(z - \alpha)^2} - \frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z - \beta} \right) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{z-\alpha} + \frac{C}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{1}{z-\beta} = A + B(z-\alpha) + C \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{1}{\alpha-\beta} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$\begin{aligned} B = \text{Res}[f(z), \alpha] &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-\beta} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{-1}{(z-\beta)^2} = \frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \text{以下同様} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(4) \quad & \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} = \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - \beta)}\end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{z-\alpha} + \frac{C}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z}{z-\beta} = A + B(z-\alpha) + C \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = A$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$\frac{(z-\beta)-z}{(z-\beta)^2} = B + C \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2}$$

$$\therefore \frac{(\alpha-\beta)-\alpha}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{-\beta}{(\alpha-\beta)^2} = B$$

解(つづき)

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z}{(z - \alpha)^2} = A \frac{z - \beta}{(z - \alpha)^2} + B \frac{z - \beta}{z - \alpha} + C, \quad \frac{\beta}{(\beta - \alpha)^2} = C$$

以上より

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2} \left(-\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{(\alpha - \beta)\alpha}{(z - \alpha)^2} - \frac{\beta}{z - \alpha} + \frac{\beta}{z - \beta} \right) \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{z-\alpha} + \frac{C}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z}{z-\beta} = A + B(z-\alpha) + C \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$\begin{aligned} B = \text{Res}[f(z), \alpha] &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-\beta} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z-\beta) - z}{(z-\beta)^2} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{-\beta}{(z-\beta)^2} = \frac{-\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \text{以下同様} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(5) \quad & \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\&= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\alpha(z - \beta) - \beta(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} = \frac{z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)}\end{aligned}$$

$$(6) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{z-\alpha} + \frac{C}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^2}{z-\beta} = A + B(z-\alpha) + C \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} = A$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2z(z-\beta) - z^2}{(z-\beta)^2} &= B + C \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} \\ \therefore \frac{2\alpha(\alpha-\beta) - \alpha^2}{(\alpha-\beta)^2} &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2} = B \end{aligned}$$

解(つづき)

両辺に $z - \beta$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z^2}{(z - \alpha)^2} = A \frac{z - \beta}{(z - \alpha)^2} + B \frac{z - \beta}{z - \alpha} + C \quad \therefore \frac{\beta^2}{(\beta - \alpha)^2} = C$$

以上より

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} &= \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{z - \alpha} + \frac{\beta^2}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{(\alpha - \beta)\alpha^2}{(z - \alpha)^2} + \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{z - \alpha} + \frac{\beta^2}{z - \beta} \right) \end{aligned}$$

$$(6) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{z-\alpha} + \frac{C}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^2}{z-\beta} = A + B(z-\alpha) + C \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$B = \text{Res}[f(z), \alpha] = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z-\beta} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{2z(z-\beta) - z^2}{(z-\beta)^2} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z^2 - 2\beta z}{(z-\beta)^2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$

以下同様

検算

$$\begin{aligned}(6) \quad & \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{z - \alpha} + \frac{\beta^2}{z - \beta} \right) \\&= \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha^2 - 2\alpha\beta)(z - \beta) + \beta^2(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha - \beta)^2 z - (\alpha - \beta)\alpha\beta}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(\alpha - \beta)z - \alpha\beta}{(z - \alpha)(z - \beta)}\end{aligned}$$

検算(つづき)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^2(z - \beta) + (\alpha - \beta)z(z - \alpha) - \alpha\beta(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(\alpha - \beta)z^2 + \alpha^2(z - \beta) - (\alpha - \beta)\alpha z - \alpha\beta(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(\alpha - \beta)z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} = \frac{z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} \end{aligned}$$

$$(7) \quad \frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{1}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$-\frac{2}{(z-\beta)^3} = B \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2 \cdot 2}{(z-\beta)^3} + C + D \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} \quad \therefore -\frac{1}{(\alpha-\beta)^3} = C$$

解(つづき)

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{1}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けてから微分し、 z に β を代入すると

$$-\frac{2}{(z - \alpha)^3} = A \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2 \cdot 2}{(z - \alpha)^3} \\ + C \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + D$$

$$\therefore -\frac{2}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} = D$$

解(つづき)

以上より

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{1}{(z-\alpha)^2} + \frac{1}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad + \frac{2}{(\alpha-\beta)^3} \left(-\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{1}{(z-\alpha)^2} + \frac{1}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad - \frac{2}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

$$(7) \quad \frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{1}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$\begin{aligned} C = \text{Res}[f(z), \alpha] &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z-\beta)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{-2}{(z-\beta)^3} = \frac{-2}{(\alpha-\beta)^3} \end{aligned}$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{1}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

$z = \beta$ における留数は

$$\begin{aligned} D = \text{Res}[f(z), \beta] &= \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z - \alpha)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{-2}{(z - \alpha)^3} = \frac{-2}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{2}{(\alpha - \beta)^3}, \quad \text{以下同様} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(7) \quad & \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{1}{(z - \alpha)^2} + \frac{1}{(z - \beta)^2} \right) - \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(z - \beta)^2 + (z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} - \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(z - \beta)^2 + (z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(z - \beta)^2 + (z - \alpha)^2 - 2(z - \alpha)(z - \beta)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} = \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}\end{aligned}$$

$$(8) \quad \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{(z-\beta) - z \cdot 2}{(z-\beta)^3} &= B \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2 \cdot 2}{(z-\beta)^3} + C \\ &\quad + D \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} \quad \therefore \frac{-(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^3} = C \end{aligned}$$

解(つづき)

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けてから微分し、 z に β を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{(z - \alpha) - z \cdot 2}{(z - \alpha)^3} &= A \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2 \cdot 2}{(z - \alpha)^3} \\ &\quad + C \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + D \\ \therefore \frac{(\beta - \alpha) - \beta \cdot 2}{(\beta - \alpha)^3} &= \frac{-\beta - \alpha}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^3} = D \end{aligned}$$

解(つづき)

以上より

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3} \left(-\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad - \frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

$$(8) \quad \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$\begin{aligned} C = \text{Res}[f(z), \alpha] &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-\beta)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z-\beta)^2 - z \cdot 2(z-\beta)}{(z-\beta)^4} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z-\beta) - z \cdot 2}{(z-\beta)^3} = \frac{-(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^3} \end{aligned}$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

$z = \beta$ における留数は

$$\begin{aligned} D = \text{Res}[f(z), \beta] &= \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z - \alpha)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{(z - \alpha)^2 - z \cdot 2(z - \alpha)}{(z - \alpha)^4} = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{(z - \alpha) - z \cdot 2}{(z - \alpha)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{-z - \alpha}{(z - \alpha)^3} = \frac{-\beta - \alpha}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^3}, \quad \text{以下同様} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(8) \quad & \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{\alpha}{(z - \alpha)^2} + \frac{\beta}{(z - \beta)^2} \right) - \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^3} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha(z - \beta)^2 + \beta(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} - \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^3} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha(z - \beta)^2 + \beta(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} - \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^2} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha(z - \beta)^2 + \beta(z - \alpha)^2 - (\alpha + \beta)(z - \alpha)(z - \beta)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{-4\alpha\beta z + (\alpha + \beta)^2 z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} = \frac{z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}\end{aligned}$$

$$(9) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^2}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2z(z-\beta) - z^2 \cdot 2}{(z-\beta)^3} &= B \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2 \cdot 2}{(z-\beta)^3} + C \\ &+ D \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} \quad \therefore \frac{-2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^3} = C \end{aligned}$$

解(つづき)

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z^2}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けてから微分し、 z に β を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2z(z - \alpha) - z^2 \cdot 2}{(z - \alpha)^3} &= A \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2 \cdot 2}{(z - \alpha)^3} \\ &\quad + C \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + D \\ \therefore \frac{2\beta(\beta - \alpha) - \beta^2 \cdot 2}{(\beta - \alpha)^3} &= \frac{-2\alpha\beta}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^3} = D \end{aligned}$$

解(つづき)

以上より

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^2}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta^2}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad + \frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^3} \left(-\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^2}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta^2}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

$$(9) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^2}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$\begin{aligned} C = \text{Res}[f(z), \alpha] &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z-\beta)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{2z(z-\beta)^2 - z^2 \cdot 2(z-\beta)}{(z-\beta)^4} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{-2\beta z}{(z-\beta)^3} = \frac{-2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^3} \end{aligned}$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z^2}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

$z = \beta$ における留数は

$$\begin{aligned} D = \text{Res}[f(z), \beta] &= \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z - \alpha)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{2z(z - \alpha)^2 - z^2 \cdot 2(z - \alpha)}{(z - \alpha)^4} = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{2z(z - \alpha) - 2z^2}{(z - \alpha)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{-2\alpha z}{(z - \alpha)^3} = \frac{-2\alpha\beta}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^3}, \quad \text{以下同様} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned}(9) \quad & \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{\alpha^2}{(z - \alpha)^2} + \frac{\beta^2}{(z - \beta)^2} \right) - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^3} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^2(z - \beta)^2 + \beta^2(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^3} \frac{(z - \beta) - (z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^2(z - \beta)^2 + \beta^2(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^2} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^2(z - \beta)^2 + \beta^2(z - \alpha)^2 - 2\alpha\beta(z - \alpha)(z - \beta)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)z^2 - 2\alpha\beta z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} = \frac{z^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}\end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{z^3}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^3}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けてから微分し、 z に α を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3z^2(z-\beta) - z^3 \cdot 2}{(z-\beta)^3} &= B \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2 \cdot 2}{(z-\beta)^3} + C \\ &+ D \frac{2(z-\alpha)(z-\beta) - (z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} \quad \therefore \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta}{(\alpha-\beta)^3} = C \end{aligned}$$

解(つづき)

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z^3}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{\beta^3}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けてから微分し、 z に β を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3z^2(z - \alpha) - z^3 \cdot 2}{(z - \alpha)^3} &= A \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2 \cdot 2}{(z - \alpha)^3} \\ &\quad + C \frac{2(z - \beta)(z - \alpha) - (z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + D \\ \therefore \frac{3\beta^2(\beta - \alpha) - \beta^3 \cdot 2}{(\beta - \alpha)^3} &= \frac{\beta^3 - 3\alpha\beta^2}{(\beta - \alpha)^3} = -\frac{\beta^3 - 3\alpha\beta^2}{(\alpha - \beta)^3} = D \end{aligned}$$

解(つづき)

以上より

$$\begin{aligned}\frac{z^3}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^3}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta^3}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta}{z-\alpha} - \frac{\beta^3 - 3\alpha\beta^2}{z-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^3}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta^3}{(z-\beta)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta}{z-\alpha} + \frac{3\alpha\beta^2 - \beta^3}{z-\beta} \right)\end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{z^3}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}$$

両辺に $(z-\alpha)^2$ を掛けて z に α を代入すると

$$\frac{z^3}{(z-\beta)^2} = A + B \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2} + C(z-\alpha) + D \frac{(z-\alpha)^2}{z-\beta} \quad \therefore \frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)^2} = A$$

$z = \alpha$ における留数は

$$\begin{aligned} C = \text{Res}[f(z), \alpha] &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^3}{(z-\beta)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{3z^2(z-\beta)^2 - z^3 \cdot 2(z-\beta)}{(z-\beta)^4} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z^3 - 3\beta z^2}{(z-\beta)^3} = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta}{(\alpha-\beta)^3} \end{aligned}$$

両辺に $(z - \beta)^2$ を掛けて z に β を代入すると

$$\frac{z^3}{(z - \alpha)^2} = A \frac{(z - \beta)^2}{(z - \alpha)^2} + B + C \frac{(z - \beta)^2}{z - \alpha} + D(z - \beta) \quad \therefore \frac{\beta^3}{(\alpha - \beta)^2} = B$$

$z = \beta$ における留数は

$$\begin{aligned} D = \text{Res}[f(z), \beta] &= \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^3}{(z - \alpha)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{3z^2(z - \alpha)^2 - z^3 \cdot 2(z - \alpha)}{(z - \alpha)^4} = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{3z^2(z - \alpha) - 2z^3}{(z - \alpha)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{z^3 - 3\alpha z^2}{(z - \alpha)^3} = \frac{\beta^3 - 3\alpha\beta^2}{(\beta - \alpha)^3} = \frac{3\alpha\beta^2 - \beta^3}{(\alpha - \beta)^3}, \quad \text{以下同様} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned} (10) \quad & \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\frac{\alpha^3}{(z - \alpha)^2} + \frac{\beta^3}{(z - \beta)^2} \right) \\ & + \frac{1}{(\alpha - \beta)^3} \left(\frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta}{z - \alpha} + \frac{3\alpha\beta^2 - \beta^3}{z - \beta} \right) \\ = & \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^3(z - \beta)^2 + \beta^3(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ & + \frac{1}{(\alpha - \beta)^3} \frac{(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta)(z - \beta) + (3\alpha\beta^2 - \beta^3)(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \end{aligned}$$

検算(つづき)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^3(z - \beta)^2 + \beta^3(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^3} \frac{(\alpha - \beta)^3 z - \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^3(z - \beta)^2 + \beta^3(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha - \beta)^2 z - \alpha\beta(\alpha + \beta)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \end{aligned}$$

検算(つづき)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\alpha^3(z - \beta)^2 + \beta^3(z - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{((\alpha - \beta)^2 z - \alpha\beta(\alpha + \beta))(z - \alpha)(z - \beta)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha^3 + \beta^3)z^2 - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)z + \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha - \beta)^2(z^3 - (\alpha + \beta)z^2 + \alpha\beta z)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{-\alpha\beta(\alpha + \beta)(z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta)}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \end{aligned}$$

検算(つづき)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha - \beta)^2 z^3}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(\alpha^3 + \beta^3)z^2 - (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)z^2 - \alpha\beta(\alpha + \beta)z^2}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{-2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)z + \alpha\beta(\alpha - \beta)^2 z + \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 z}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2} \\ &= \frac{z^3}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2} \end{aligned}$$

まとめ

$$(1) \quad \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right)$$

$$(2) \quad \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{z - \alpha} - \frac{\beta}{z - \beta} \right)$$

$$(3) \quad \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta)} = 1 + \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^2}{z - \alpha} - \frac{\beta^2}{z - \beta} \right)$$

まとめ(つづき)

$$(4) \quad \frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{1}{(z-\alpha)^2} - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)$$

$$(5) \quad \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{(z-\alpha)^2} - \frac{\beta}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)$$

$$(6) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)} = \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} \frac{1}{(z-\alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{z-\alpha} + \frac{\beta^2}{z-\beta} \right)$$

まとめ(つづき)

$$(7) \quad \frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{1}{(z-\alpha)^2} + \frac{1}{(z-\beta)^2} \right) \\ - \frac{2}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)$$

$$(8) \quad \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(z-\beta)^2} \right) \\ - \frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)$$

まとめ(つづき)

$$(9) \quad \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^2}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta^2}{(z-\beta)^2} \right) - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)$$

$$(10) \quad \frac{z^3}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^3}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta^3}{(z-\beta)^2} \right) + \frac{1}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta}{z-\alpha} + \frac{3\alpha\beta^2 - \beta^3}{z-\beta} \right)$$