位相速度と群速度

渡邉 俊夫

位相速度と群速度

波の波数を k、角周波数を ω とするとき、

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad を \quad 位相速度$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad を \quad 群速度$$

という。一般に、群速度は波束の進む速度というような説明がされているが、

位相速度：1つの波の位相の等しい点が進む速度

群速度：2つの波の位相差の等しい点が進む速度

と解釈できることを述べる。

波の表式

一次元の直線上を伝播する波の空間・時間的な変化は、次式で表される。

$$\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) = A\cos\Phi(x,t)$$

ここで、A は振幅、k は波数、ω は角周波数であり、

$$\Phi(x,t) = kx - \omega t + \phi$$

を波の位相という。ϕ は $x = 0, t = 0$ における初期位相である。

また、波数 k と波長 λ との関係は

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

であり、角周波数 ω と周波数 f との関係は

$$\omega = 2\pi f$$

である。

位相速度

1つの波

$$\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) = A\cos\Phi(x,t)$$

の位置 x、時刻 t における位相

$$\Phi(x,t) = kx - \omega t + \phi$$

が、位置 $x + \Delta x$、時刻 $t + \Delta t$ における位相

$$\Phi(x + \Delta x, t + \Delta t) = k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) + \phi$$

と等しいとすると

$$k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) + \phi = kx - \omega t + \phi$$

$$\therefore k\Delta x = \omega\Delta t$$

ここで、

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

は位相の等しい点が進む速度であり、これが位相速度である。

群速度

2つの波

$$\xi_1(x,t) = A_1\cos(k_1x - \omega_1t + \phi_1) = A_1\cos\Phi_1(x,t)$$

$$\xi_2(x,t) = A_2\cos(k_2x - \omega_2t + \phi_2) = A_2\cos\Phi_2(x,t)$$

の位置 x、時刻 t における位相差

$$\Delta\Phi(x,t) = \Phi_1(x,t) - \Phi_2(x,t)$$

$$= (k_1x - \omega_1t + \phi_1) - (k_2x - \omega_2t + \phi_2)$$

が、位置 $x+\Delta x$、時刻 $t+\Delta t$ における位相差

$$\Delta\Phi(x+\Delta x, t+\Delta t) = \Delta\Phi_1(x+\Delta x, t+\Delta t) - \Delta\Phi_2(x+\Delta x, t+\Delta t)$$

$$= (k_1(x+\Delta x) - \omega_1(t+\Delta t) + \phi_1) - (k_2(x+\Delta x) - \omega_2(t+\Delta t) + \phi_2)$$

と等しいとすると

$$(k_1\Delta x - \omega_1\Delta t) - (k_2\Delta x - \omega_2\Delta t) = 0$$

群速度

2つの波の位置 x、時刻 t における位相差 $\Delta\Phi(x,t)$ が、位置 $x+\Delta x$、時刻 $t+\Delta t$ における位相差 $\Delta\Phi(x+\Delta x, t+\Delta t)$ と等しいとすると

$$(k_1\Delta x - \omega_1\Delta t) - (k_2\Delta x - \omega_2\Delta t) = 0$$

$$\therefore (k_1 - k_2)\Delta x = (\omega_1 - \omega_2)\Delta t$$

ここで、

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

は2つの波の位相差の等しい点が進む速度であり、これが群速度である。

$\Delta k \to 0$ の極限では

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

となる。