畳み込み
―記憶と忘却による説明―

渡邉 俊夫

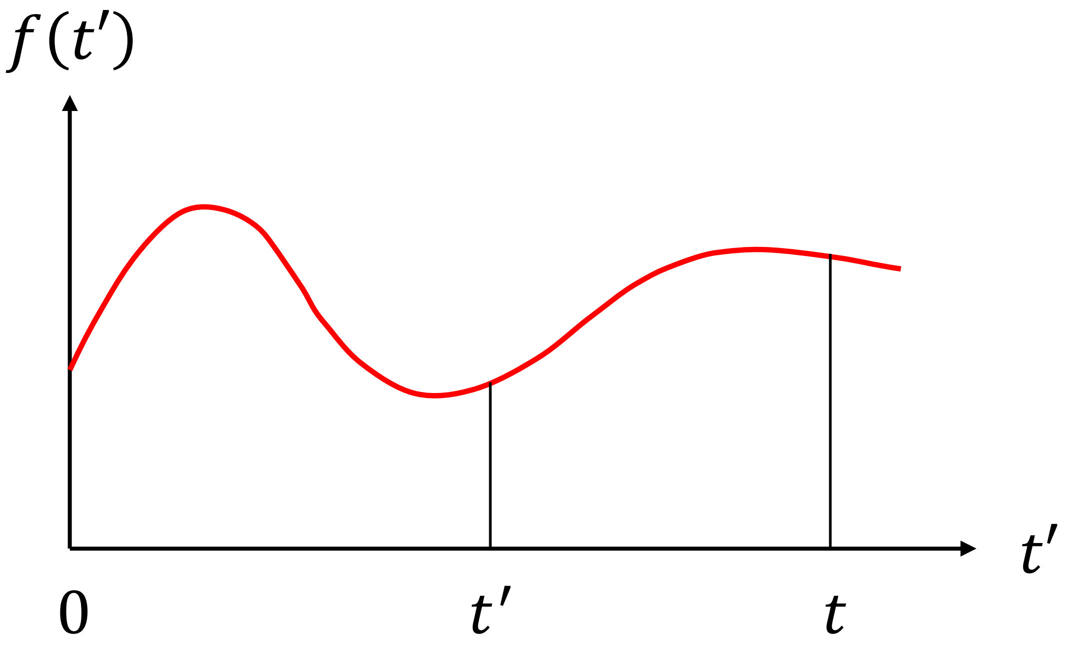
記憶(忘却しない場合)

時刻 $t' = 0$ から学習を始め、時刻 t' において単位時間あたり $f(t')$ の記憶をしたとする。

その記憶は時間が経過しても忘却せずにそのまま残るとすると、時刻 t における記憶の総量 $F(t)$ は、時刻 $t' = 0$ から時刻 $t' = t$ までの記憶量を積分することによって

$$F(t) = \int_0^t f(t')dt'$$

と表される。



記憶(忘却する場合)①:時刻 t' で積分

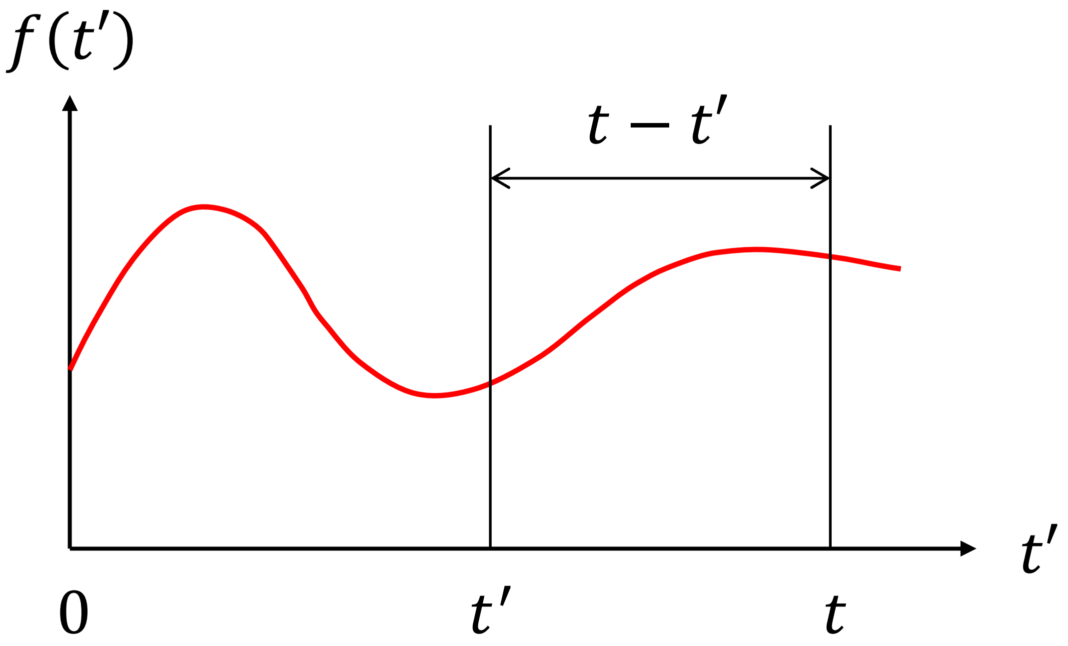
時刻 $t' = 0$ から学習を始め、時刻 t' において単位時間あたり $f(t')$ の記憶をしたとする。

その記憶は時間の経過とともに忘却していき、時間 τ が経過した後には単位記憶量あたり $g(\tau)$ に減少するものとする。このとき、**時刻 t' に記憶した量 $f(t')$ は、時刻 t までに時間が $\tau = t - t'$ 経過しているから、時刻 t では $f(t')g(t - t')$ に減少している。**

したがって、時刻 t において残存している記憶の総量 $F(t)$ は、時刻 $t' = 0$ から時刻 $t' = t$ までの記憶量を積分することによって

$$F(t) = \int_0^t f(t')g(t - t')dt'$$

と表される。



記憶(忘却する場合)②:経過時間 τ で積分

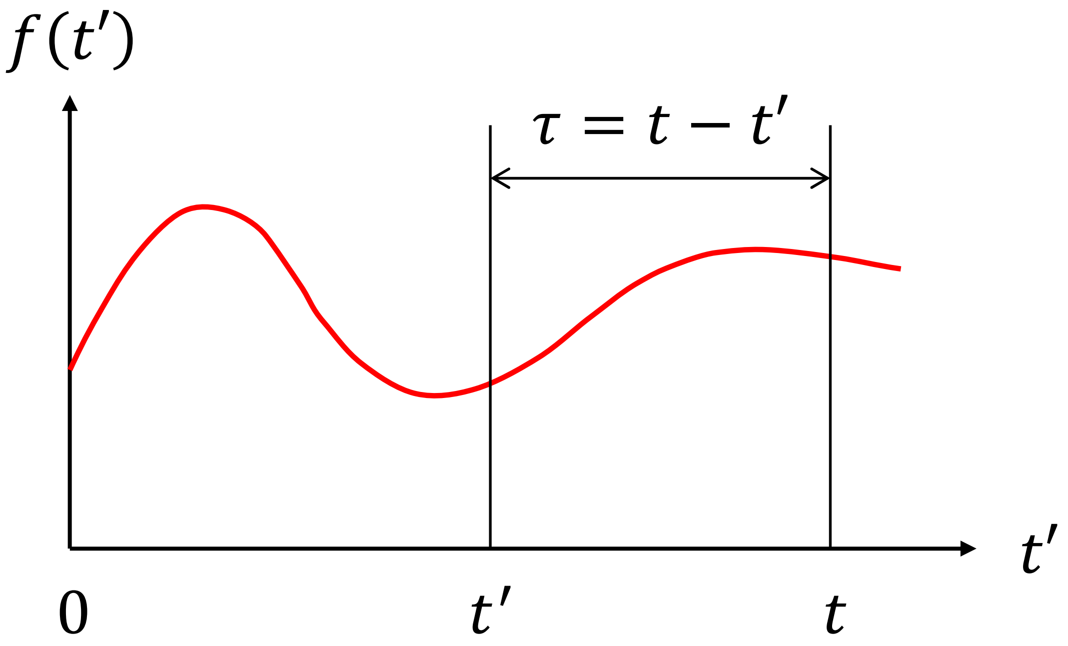
時刻 $t' = 0$ から学習を始め、時刻 t' において単位時間あたり $f(t')$ の記憶をしたとする。

その記憶は時間の経過とともに忘却していき、時間 τ が経過した後には単位記憶量あたり $g(\tau)$ に減少するものとする。このとき、**記憶してから時刻 t までに時間 τ が経過したのは、時刻 $t' = t - \tau$ の記憶 $f(t-\tau)$ であり、それは時刻 t では $f(t-\tau)g(\tau)$ に減少している。**

したがって、時刻 t において残存している記憶の総量 $F(t)$ は、**経過時間 $\tau = 0$ から $\tau = t$ までの記憶量を積分する**ことによって

$$F(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

と表すこともできる。



畳み込み

p. 3の積分（時刻 t' で積分）とp. 4の積分（経過時間 τ で積分）は等しい。これを $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込みといい、$f*g$ で表す。

$$f*g=\int_0^t f(t')g(t-t')dt'=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

畳み込みのフーリエ変換やラプラス変換には、次の関係が成り立つ。

- $f*g$ のフーリエ変換は、f のフーリエ変換と g のフーリエ変換の積である。

  $\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$

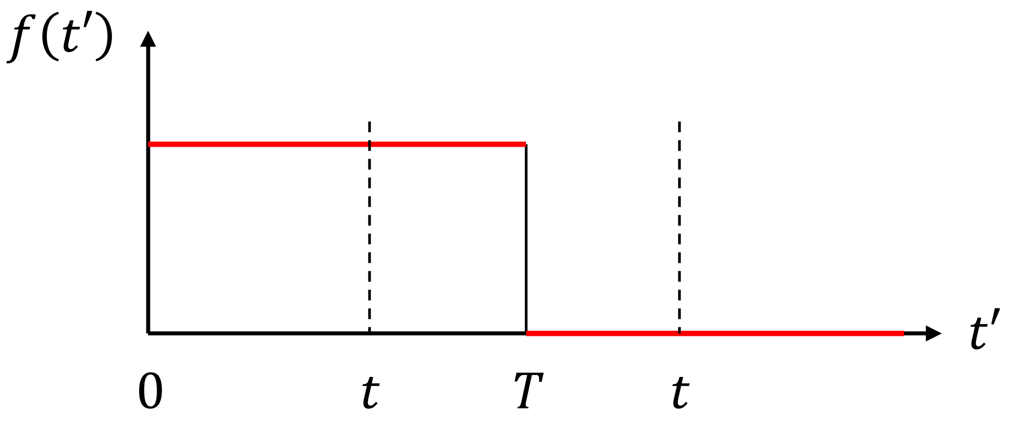
- $f*g$ のラプラス変換は、f のラプラス変換と g のラプラス変換の積である。

  $\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g]$

畳み込みの計算①

$$f(t) = \begin{cases} 1\ (0 \le t \le T) \\ 0\ (t > T) \end{cases}$$

$$g(t) = e^{-at}$$



について、具体的に畳み込みを第1式（時刻 t' で積分）により計算すると

$0 \le t \le T$ のとき、積分範囲 $0 \le t' \le t$ において $f(t) = 1$ であるから

$$f * g = \int_0^t e^{-a(t-t')} dt' = e^{-at} \int_0^t e^{at'} dt' = e^{-at} \left[\frac{e^{at'}}{a} \right]_0^t = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

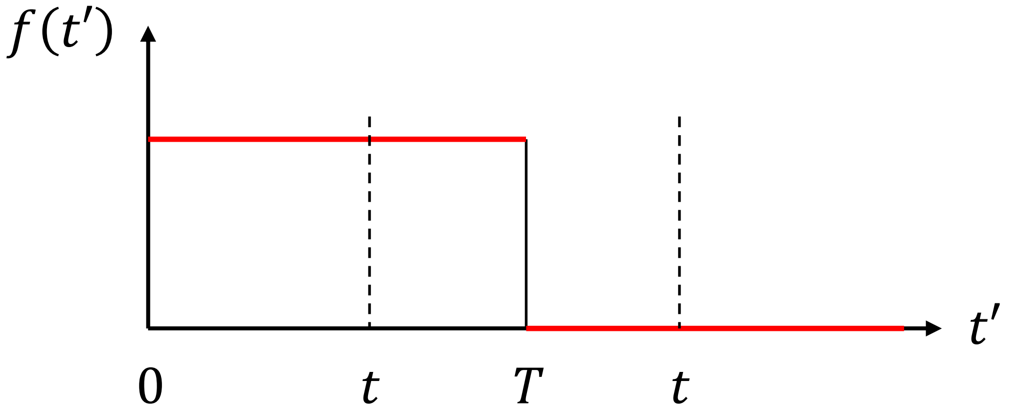
$t > T$ のとき、積分範囲 $0 \le t' \le t$ のうち $0 \le t' \le T$ では $f(t) = 1$ であり、
$T \le t' \le t$ では $f(t) = 0$ であるから

$$f * g = \int_0^T e^{-a(t-t')} dt' = e^{-at} \int_0^T e^{at'} dt' = e^{-at} \left[\frac{e^{at'}}{a} \right]_0^T = e^{-at} \frac{e^{aT} - 1}{a}$$

畳み込みの計算②

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ (0 \leq t \leq T) \\ 0 \ (t > T) \end{cases}$$

$$g(t) = e^{-at}$$



について、具体的に畳み込みを第2式（経過時間 τ で積分）により計算すると

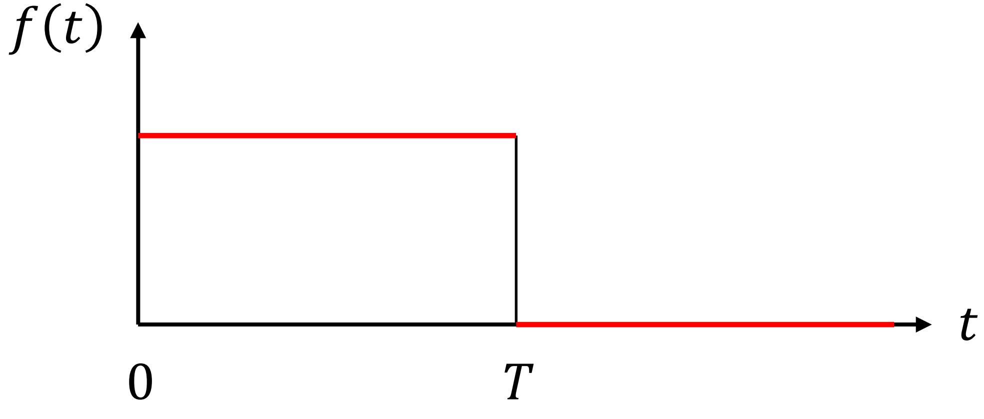
$0 \leq t \leq T$ のとき、積分範囲 $0 \leq \tau \leq t$ において $f(t-\tau) = 1$ であるから

$$f * g = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \left[\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right]_0^t = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

$t > T$ のとき、積分範囲 $0 \leq \tau \leq t$ のうち $0 \leq \tau < t - T$ では $f(t-\tau) = 0$ であり、
$t - T \leq \tau \leq t$ では $f(t-\tau) = 1$ であるから

$$f * g = \int_{t-T}^t e^{-a\tau} d\tau = \left[\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right]_{t-T}^t = \frac{e^{-a(t-T)} - e^{-at}}{a} = e^{-at}\frac{e^{aT}-1}{a}$$

ラプラス変換による畳み込みの計算



$$f(t) = \begin{cases} 1 \ (0 \leq t \leq T) \\ 0 \ (t > T) \end{cases}$$

$$g(t) = e^{-at}$$

をラプラス変換すると

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^T e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

であるから

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s+a}\frac{1-e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)$$

ラプラス変換による畳み込みの計算

畳み込みのラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) - \frac{e^{-Ts}}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)$$

であり、e^{-Ts} を含む第2項は第1項を時間 T シフトしたものである。

$0 \leq t \leq T$ のとき、第2項の逆ラプラス変換は0だから

$$f * g = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)\right] = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

$t > T$ のとき、第2項は第1項を時間 T シフトしたものだから

$$f * g = \frac{1 - e^{-at}}{a} - \frac{1 - e^{-a(t-T)}}{a} = \frac{e^{-a(t-T)} - e^{-at}}{a} = e^{-at}\frac{e^{aT} - 1}{a}$$

これは、畳み込みを直接計算した結果と一致している。

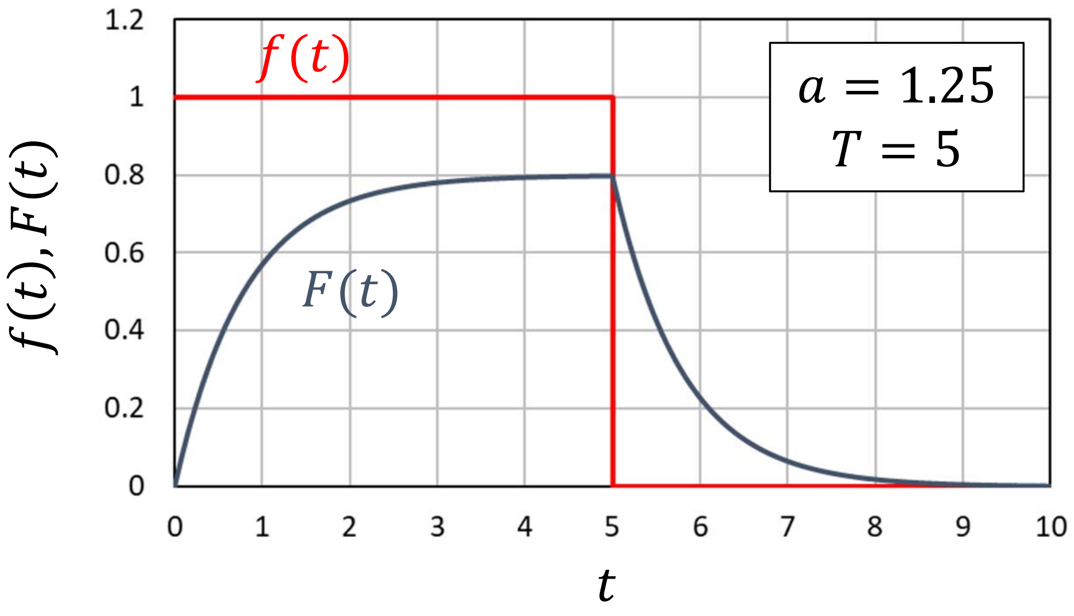
畳み込みの計算

$$f(t) = \begin{cases} 1 \; (0 \le t \le T) \\ 0 \; (t > T) \end{cases}$$

$$g(t) = e^{-at}$$

の畳み込みは

$$F(t) = f * g = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-at}}{a} (0 \le t \le T) \\ e^{-at} \dfrac{e^{aT} - 1}{a} (t > T) \end{cases}$$



である。$t = 0$ における $F(t)$ の接線は $F(t) = t$ であり t に比例して増加するが、その後、$t \le T$ において $F(t)$ は指数関数的に飽和して T が十分に大きければ $F(t) = 1/a$ に漸近する。$t = T$ において $F(t)$ は連続で $F(T) = (1 - e^{-aT})/a$ であり、その後、指数関数的に減衰して $F(t) = 0$ に漸近する。