ラプラス変換における
初期値の定理・最終値の定理

渡邉 俊夫

微分のラプラス変換

原関数 $f(t)$ の微分 $f'(t)$ のラプラス変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(e^{-st})'dt \\
&= [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt \\
&= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= -f(0) + sF(s) \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}
$$

と表される。

初期値の定理

原関数 $f(t)$ の微分 $f'(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

を

$$sF(s) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

と表して $s \to \infty$ の極限をとると

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \to 0$$

であるから

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

が成り立つ。これにより、ラプラス変換 $F(s)$ から初期値 $f(0)$ を求めることができる。

最終値の定理

原関数 $f(t)$ の微分 $f'(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

を

$$sF(s) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

と表して $s \to 0$ の極限をとると

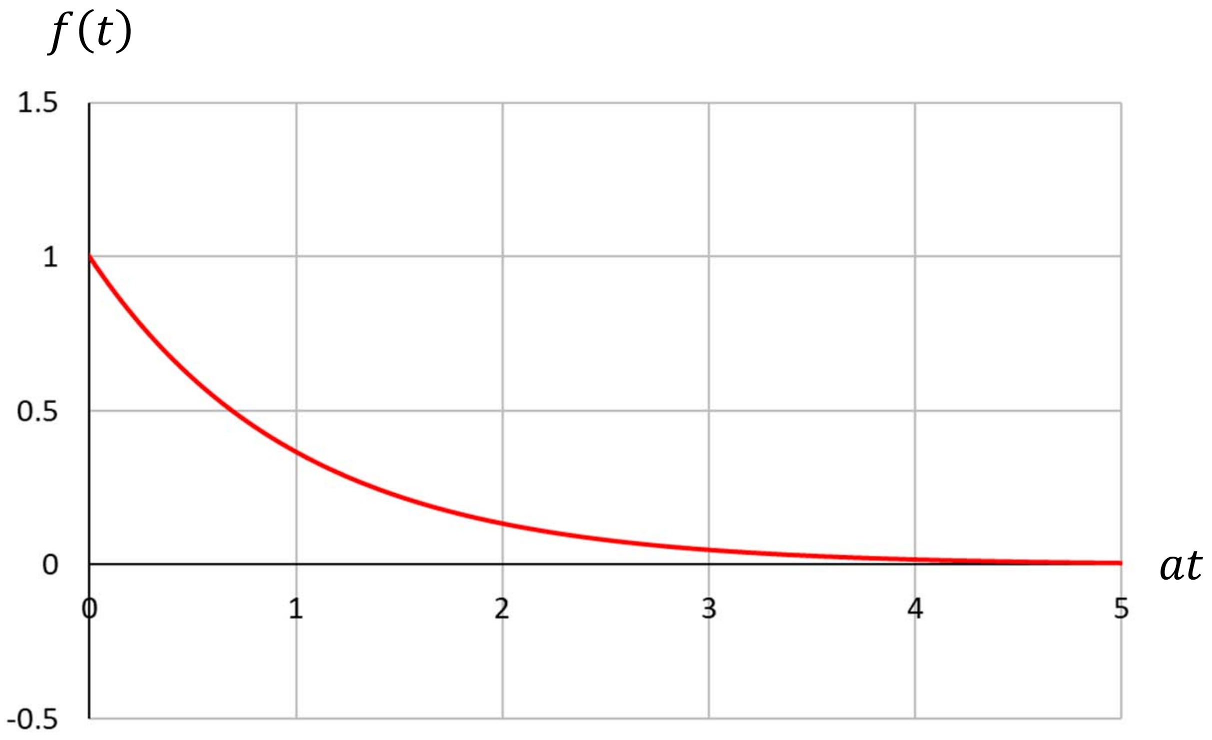
$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \to \int_0^\infty f'(t)\,dt = [f(t)]_0^\infty = f(\infty) - f(0)$$

であるから

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$$

が成り立つ。これにより、ラプラス変換 $F(s)$ から最終値 $f(\infty)$ を求めることができる。

例1：指数関数



$f(t)=e^{-at}$ に対して

$$F(s)=\frac{1}{s+a}$$

より、初期値は

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a}=1$$

である。また、$a>0$ のとき、最終値は

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a}=\lim_{s\to 0}\frac{0}{a}=0$$

である。$a=0$ のときは $f(t)=1$ であり、最終値は

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s}=1$$

である。なお、$a<0$ のときは $t\to\infty$で $f(t)$ が発散するので最終値 $f(\infty)$ は存在しない。

例2:余弦関数

$f(t) = \cos \omega t$ に対して

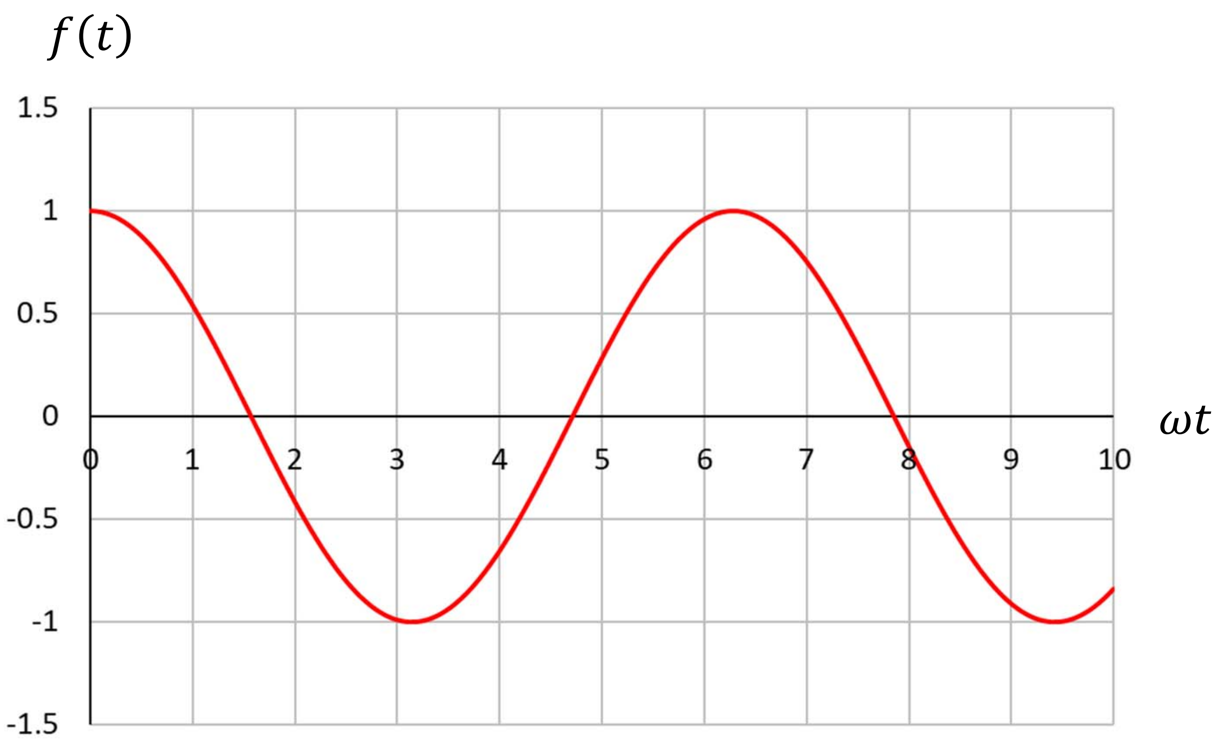
$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

より、初期値は

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 1$$

である。

なお、$f(t)$ は $t \to \infty$で振動するので
最終値 $f(\infty)$ は存在しない。



例3：正弦関数

$f(t) = \sin \omega t$ に対して

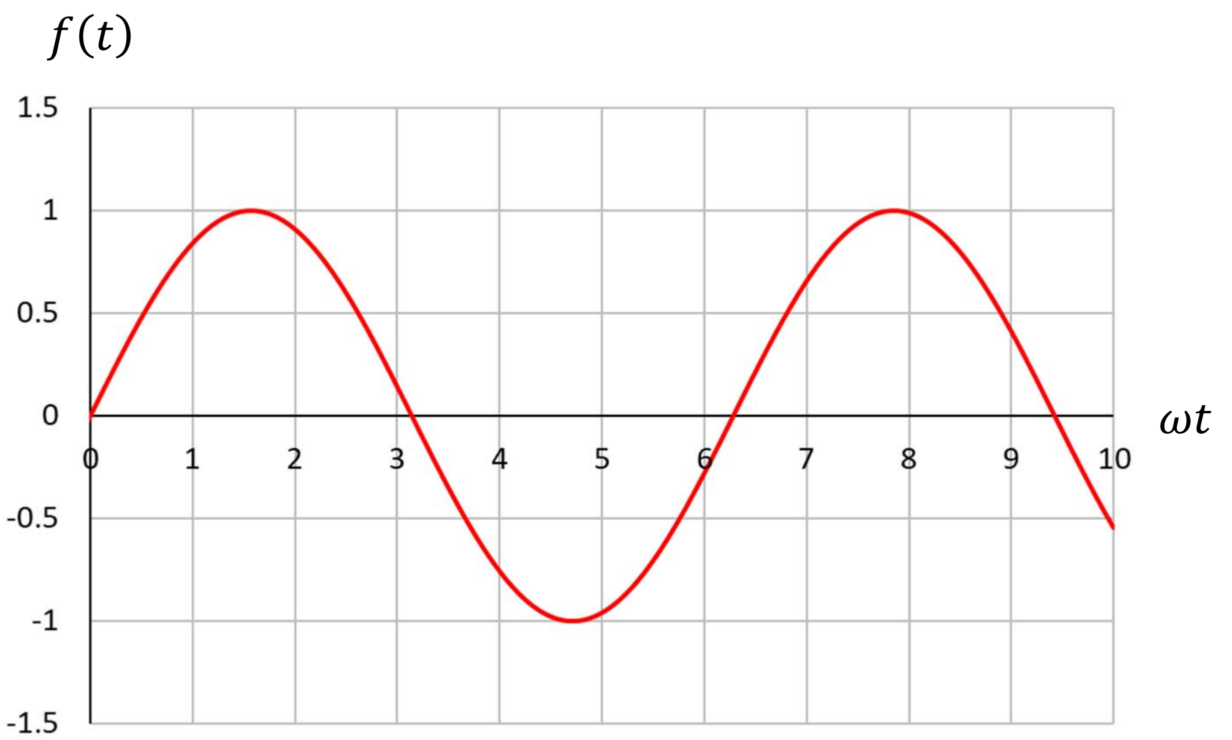
$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

より、初期値は

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} = 0$$

である。

なお、$f(t)$ は $t \to \infty$で振動するので
最終値 $f(\infty)$ は存在しない。



例4：指数減衰余弦関数

$f(t) = e^{-at} \cos \omega t \ (a > 0)$に対して

$$F(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

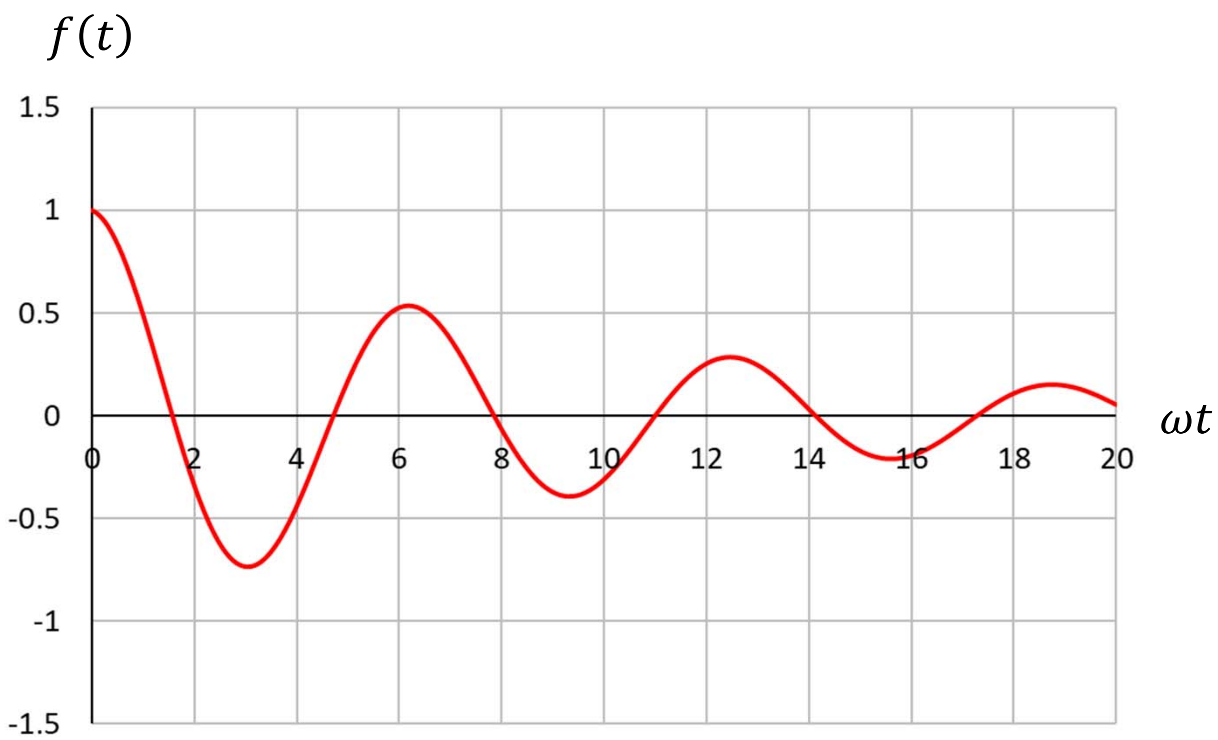
より、初期値は

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$
$$= \lim_{s \to \infty} \frac{s(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2} = 1$$

である。また、最終値は

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{s(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2} = 0$$

である。



例5：指数減衰正弦関数

$f(t) = e^{-at} \sin \omega t \ (a > 0)$に対して

$$F(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

より、初期値は

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{s\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = 0$$

である。また、最終値は

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = 0$$

である。