

ベクトル三重積の公式の (成分計算を用いない) 「完全な」証明

### 1. ベクトル三重積の公式

3つのベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  から作られるベクトル  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  をベクトル三重積という。ベクトル三重積について、次の公式が成り立つ [1-14]。

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

この公式は、左辺と右辺を成分計算して比較すれば機械的に証明できる [2-6] が、その方法では幾何学的な意味を把握しにくい。それに対して、幾何学的な考察 [7-13] に基づく証明 [14] が知られているが、その証明には難点があるとの指摘がある [15]。

本稿では、その難点を解消する方法を示す。これにより、成分計算を用いることなく、幾何学的な考察に基づいてベクトル三重積の公式を完全に証明することができる。

### 2. 成分計算を用いた証明

まず、成分計算を用いた証明 [2-6] を示しておく。

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$$

とすると

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (b_y c_z - b_z c_y) \mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \mathbf{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{k}$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z)) \mathbf{i} \\ &\quad + (a_z (b_y c_z - b_z c_y) - a_x (b_x c_y - b_y c_x)) \mathbf{j} \\ &\quad + (a_x (b_z c_x - b_x c_z) - a_y (b_y c_z - b_z c_y)) \mathbf{k} \\ &= ((a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_y b_y + a_z b_z) c_x) \mathbf{i} \\ &\quad + ((a_x c_x + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_z b_z) c_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left( (a_x c_x + a_y c_y) b_z - (a_x b_x + a_y b_y) c_z \right) \mathbf{k} \\ = &\left( (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_x \right) \mathbf{i} \\ &+ \left( (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_y \right) \mathbf{j} \\ &+ \left( (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_z - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_z \right) \mathbf{k} \\ = &(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &- (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) \\ = &(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

が成り立つ。

この方法によれば、機械的に証明はできるが、幾何学的な意味を把握しにくい。

### 3. 幾何学的な考察に基づく従来の証明

次に、幾何学的な考察 [7-13] に基づく従来の証明 [14] を示す。

#### 【Step 0】

まず、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  のいずれかが  $\mathbf{0}$  の場合には、与式の左辺も右辺も  $\mathbf{0}$  になるから、与式は成り立つ (詳細は補足を参照)。したがって、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  がいずれも  $\mathbf{0}$  でない場合について考えればよい。

#### 【Step 1】

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  は  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  に垂直であり、 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  は  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  に垂直である。したがって、 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  は  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  が張る平面内にあり、スカラー  $\lambda, \mu$  を用いて

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$$

と表すことができる。また、 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  は  $\mathbf{a}$  にも垂直であるから、上式の両辺について  $\mathbf{a}$  との内積をとると

$$0 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mu \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

となる。これより、定数  $\kappa$  を用いて、 $\lambda = \kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ ,  $\mu = -\kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  と表すことができる (詳

細は補足を参照)。したがって、

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

を得る。

**【Step 2】**

上式は、ベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  について線形であるから、右辺の定数  $\kappa$  は  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  によらない定数である。そこで、

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{j}$$

を代入すると、左辺は

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

であり、右辺は

$$\kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{i} \cdot \mathbf{j})\mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{j}) = -\kappa\mathbf{j}$$

であるから、

$$\kappa = 1$$

となる。ゆえに、任意のベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  に対して

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

が成り立つ。

#### 4. 従来の証明の難点

従来の証明では、**【Step 1】**において

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

を導いた後、**【Step 2】**で

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{j}$$

を代入することによって  $\kappa = 1$  であることを示している。しかし、これでは任意のベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  に対する証明になっていないのではないかとの指摘がある [15]。この方法によ

る証明を示したテキスト [14] では、左辺は  $\mathbf{a}$  について 1 次式なので、右辺も  $\mathbf{a}$  について 1 次式でなければならないから、 $\kappa$  はベクトル  $\mathbf{a}$  に無関係である、という説明がなされているが、確かに納得しにくいところではある。それもあってか、幾何学的な考察に言及しているが  $\kappa = 1$  であることを示していないテキストも多い [7-12]。テキスト [13] では、【Step 1】を示した後、 $\mathbf{a}$  の方向を座標軸とする直交座標系での成分計算により  $\kappa = 1$  であることを示しているが、そもそも成分計算を用いるのであれば【Step 1】は不要である。そこで、以下では、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  に特別なベクトルを代入することなく、数式の展開のみによって  $\kappa = 1$  であることを示す。

### 5. 幾何学的な考察に基づく新たな証明

【Step 0】と【Step 1】は従来の証明と同じであり、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  がいずれも  $\mathbf{0}$  でない場合について

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

を得る。

#### 【Step 2 (New)】

ここで、両辺の大きさの 2 乗をとると、左辺の大きさの 2 乗は

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 (|\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2) - (\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 - (|\mathbf{c}|^2 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2) \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 - |\mathbf{c}|^2 (|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2) + |\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 \\ &= -|\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 + |\mathbf{c}|^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + |\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 \\ &= -|\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 + |\mathbf{c}|^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \kappa^2 |(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}|^2 \\ &= -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \\ &\quad + \kappa^2 ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})^2 |\mathbf{b}|^2 - 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})) \\ &= (\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \\ &\quad + \kappa^2 ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \end{aligned}$$

となる。いっぽう、右辺の大きさの2乗は

$$\kappa^2 |(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}|^2 = \kappa^2 ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}))$$

であるから、両辺を等しいとおいて

$$(\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 = \kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$$

$$(\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 = (\kappa^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$$

$$\therefore (\kappa^2 - 1)((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2) = 0$$

となる。したがって、 $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 \neq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$  のとき

$$\kappa^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \kappa = \pm 1$$

である。なお、 $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$  のときについても、 $\kappa^2 = 1$  となる (補足を参照)。

### 【Step 3】

外積の定義より、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  は右手系であるから、そのスカラー三重積は

$$\mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))) \geq 0$$

である。左辺を展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))) &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot ((\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times \mathbf{a}) \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))) \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \left( \kappa \left( (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right) \right) \\ &= -\kappa (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \left( (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))\mathbf{a} - |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right) \\ &= -\kappa \left( (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \right) \\ &= \kappa \left( |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^2 \right) \end{aligned}$$

となるが、コーシー・シュワルツの不等式より

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \geq (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^2$$

であるから

$$\kappa \geq 0$$

である。ここで、【Step 2 (New)】より  $\kappa = \pm 1$  であったから、 $\kappa = 1$  を得る。

## 6. まとめ

ベクトル三重積の公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

の幾何学的な考察に基づく証明において、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  に特別なベクトルを代入することなく、数式の展開のみによって証明を行った。具体的には、ベクトルの大きさの比較と、右手系ではスカラー三重積が正であることから、係数を定めた。これにより、成分計算を用いることなく、幾何学的な考察に基づいてベクトル三重積の公式を完全に証明することができた。

## 参考文献

- [1] 宮本智之、植之原裕行「スタンダード 工学系のベクトル解析」講談社、2014.
- [2] 安達忠次「ベクトルとテンソル」培風館、1957.
- [3] 青木利夫、川口俊一「ベクトル解析要論」培風館、1978.
- [4] 山内正敏「詳説演習 ベクトル解析」培風館、1988.
- [5] 戸田盛和「ベクトル解析 (理工系の数学入門コース 3)」岩波書店、1989.
- [6] E. クライツィグ「線形代数とベクトル解析 (技術者のための高等数学 2)」原書第 8 版 (堀素夫 訳) 培風館、2003.
- [7] H. F. デーヴィス、A. D. スナイダー「理工学のためのベクトル解析入門」(藤田恵子 訳) 啓学図書、1982.
- [8] 戸田盛和、渡辺慎介「ベクトル解析演習 (理工系の数学入門コース/演習 3)」岩波書店、1999.
- [9] 阿部龍蔵「ベクトル解析入門 (新物理学ライブラリ 9)」サイエンス社、2002.
- [10] 村上雅人「なるほどベクトル解析」海鳴社、2003.
- [11] 丸山武男、石井望「要点がわかるベクトル解析」コロナ社、2007.
- [12] 千葉逸人「工学部で学ぶ数学」プレアデス出版、2009.
- [13] 鈴木尚通「スカラー場、ベクトル場 (物理数学 One Point 8)」共立出版、1993.
- [14] 青野修「ベクトルの積はなぜ必要か (物理数学 One Point 14)」共立出版、1995.
- [15] 竹野茂治「ベクトル三重積の公式の証明について」

<http://202.243.124.27/~shige/math/lecture/misc/data/exterior1.pdf>

< 【Step 0】 の補足 >

$a, b, c$  のいずれかが  $0$  の場合には、与式が成り立つことを示す。

(i)  $a = 0$  のとき

与式の左辺は

$$a \times (b \times c) = 0 \times (b \times c) = 0$$

であり、右辺も

$$(a \cdot c)b - (a \cdot b)c = 0 \cdot b - 0 \cdot c = 0$$

であるから、与式は成り立つ。

(ii)  $b = 0$  のとき

与式の左辺は

$$a \times (b \times c) = a \times 0 = 0$$

であり、右辺も

$$(a \cdot c)b - (a \cdot b)c = (a \cdot c) \cdot 0 - 0 \cdot c = 0$$

であるから、与式は成り立つ。

(iii)  $c = 0$  のとき

与式の左辺は

$$a \times (b \times c) = a \times 0 = 0$$

であり、右辺も

$$(a \cdot c)b - (a \cdot b)c = 0 \cdot b - (a \cdot b) \cdot 0 = 0$$

であるから、与式は成り立つ。

以上より、 $a, b, c$  のいずれかが  $0$  の場合には、与式が成り立つ。

< 【Step 1】 の補足 >

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$  の場合、 $\mathbf{a}$  は  $\mathbf{b}$  にも  $\mathbf{c}$  にも垂直であるから、 $\mathbf{a}$  は  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  に平行であり、与式の左辺は  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{0}$  になる。いっぽう、与式の右辺も  $\mathbf{0}$  になるから、与式は成り立つ。したがって、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  か  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  の少なくとも一方は  $0$  でない場合について考えればよい。

まず、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \neq 0$  の場合には

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}$$

とおくと

$$\lambda = \kappa \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

および

$$\mu = \frac{-\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}} = -\kappa \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

より

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

を得る。

同様に、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$  の場合には

$$\kappa = \frac{-\mu}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

とおくと

$$\mu = -\kappa \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

および

$$\lambda = \frac{-\mu \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \kappa \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

より

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

を得る。

すなわち、いずれの場合においても

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

と表すことができる。



< 【Step 2 (New)】 の補足 >

$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$  のときにも

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \kappa((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c})$$

の  $\kappa$  の値は  $\kappa^2 = 1$  であることを示す。

まず、本編で得られた関係式

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|^2 &= (\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \\ &\quad + \kappa^2((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \end{aligned}$$

を用いると、与式の左辺の大きさの2乗は、次のようにも表せる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|^2 &= |-\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})|^2 = |\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})|^2 \\ &= (\kappa^2 - 1)(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 \\ &\quad + \kappa^2((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})) \\ &= (\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 \\ &\quad + \kappa^2((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \end{aligned}$$

したがって、

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 + \kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 + \kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$$

$$\therefore (\kappa^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 = (\kappa^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$$

となるから、

$$(\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 = (\kappa^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2$$

と合わせて

$$(\kappa^2 - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 = (\kappa^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 = (\kappa^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2$$

である。この式は

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2$$

のときには  $\kappa$  によらず成り立つ。このとき、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  がいずれも  $\mathbf{0}$  でないことから

$$\frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2}{|\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}|^2} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{c}|^2}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \pm \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \pm \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} \quad (\text{複号は任意})$$

となる。そこで、以下において  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  と  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  の正負の組み合わせにより、3つの場合について考える。

(i)  $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|}$  のとき

$\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角はいずれも  $\theta$  に等しいから、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  が張る平面内への  $\mathbf{a}$  の射影は、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角  $\theta$  の二等分線上にある。その方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}$  とすると

$$\mathbf{e} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}}{\left| \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \right|} = \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}|}$$

であるから

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}|}$$

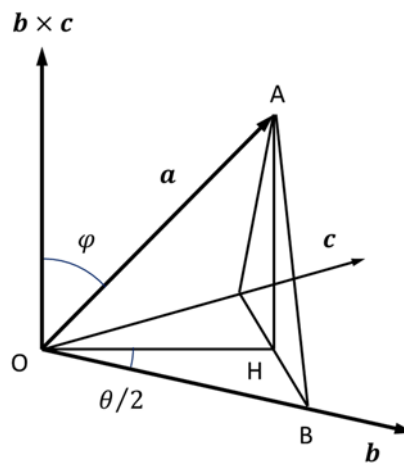
となる。

ここで、 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2|\mathbf{c}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2|\mathbf{b}|^2$  より  $|\mathbf{c}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \pm|\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  であるが、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \neq 0$  より  $|\mathbf{c}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  となる。したがって、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  のなす角を  $\varphi$  とすると、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \varphi &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2 = \left( \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}|} \right)^2 = \frac{(|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2}{|\mathbf{c}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{c}|^2} \\ &= \frac{(2|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{c}|^2|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}|^2 + 2|\mathbf{c}||\mathbf{b}|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \\ &= \frac{4|\mathbf{c}|^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{2|\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}|^2 + 2|\mathbf{b}||\mathbf{c}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} \\ &= \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2|\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|(|\mathbf{b}||\mathbf{c}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} \end{aligned}$$

であるから、与式の左辺の大きさの2乗は

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \sin^2 \varphi \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2(|\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} (|\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2) \\
 &= \frac{2|\mathbf{c}|^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|} (|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
 &= 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|}\right)
 \end{aligned}$$

となる。いっぽう、与式の右辺の大きさの 2 乗は

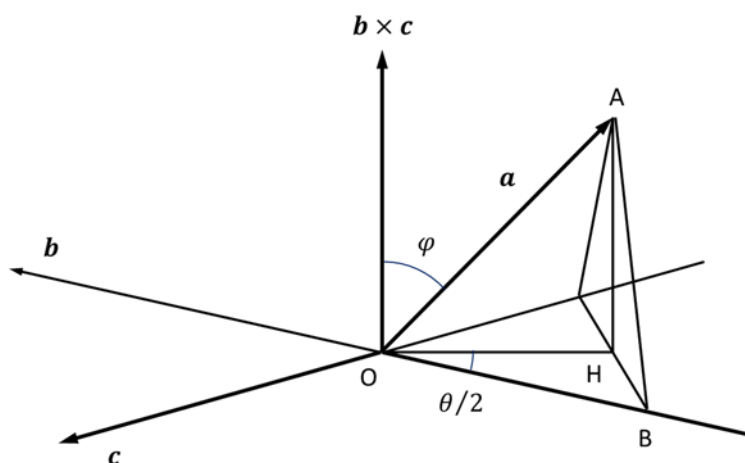
$$\begin{aligned}
 \kappa^2 |(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}|^2 &= \kappa^2 ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \\
 &= 2\kappa^2 ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \\
 &= 2\kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2}\right) \\
 &= 2\kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})}\right) \\
 &= 2\kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|}\right)
 \end{aligned}$$

であるから

$$\kappa^2 = 1$$

となる。

(ii)  $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|} = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{c}|}$  のとき



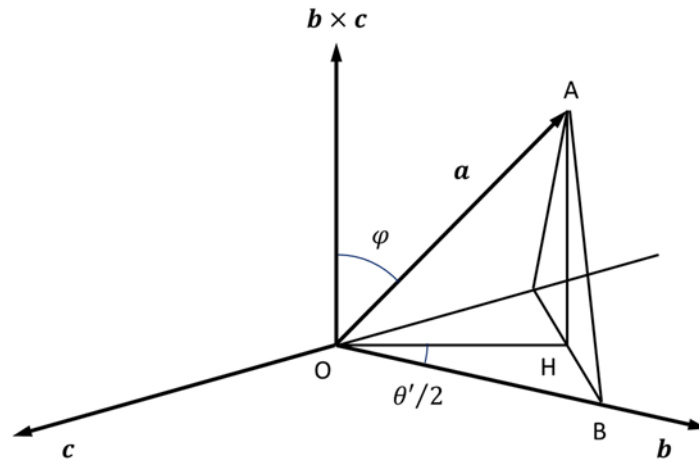
$\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角はいずれも  $\theta$  の補角に等しいから、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} < 0$  となり、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  が張る平面内への  $\mathbf{a}$  の射影は、 $-\mathbf{b}$  と  $-\mathbf{c}$  の

なす角の2等分線上にある。 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角  $\theta$  の2等分線上の方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}$  とすると、(i)の場合と同様にして、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \neq 0$  より  $|\mathbf{c}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  となり、

$$\kappa^2 = 1$$

が導かれる。

(iii)  $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|}$  または  $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|}$  のとき



$\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角の一方は  $\theta$  に等しく、他方は  $\theta$  の補角に等しいから、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  が張る平面内への  $\mathbf{a}$  の射影は、 $\mathbf{b}$  と  $-\mathbf{c}$  (または  $-\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$ ) のなす角の2等分線上にある。その方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}'$  とすると

$$\mathbf{e}' = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} - \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}}{\left| \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} - \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \right|} = \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}}{||\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}|}$$

であるから

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{a} \cdot \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}}{||\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{||\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}|}$$

となる。ここで、 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2$  より  $|\mathbf{c}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \pm |\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  であるが、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}' \neq 0$  より  $|\mathbf{c}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -|\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  となる。したがって、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  のなす角を  $\varphi$  とすると、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \varphi &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}')^2 = \left( \frac{|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{||\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}|} \right)^2 = \frac{(|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2}{||\mathbf{c}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{c}|^2} \\ &= \frac{(2|\mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{c}|^2 |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - 2|\mathbf{c}||\mathbf{b}|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \\ &= \frac{4|\mathbf{c}|^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{2|\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - 2|\mathbf{b}||\mathbf{c}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}$$

であるから、与式の左辺の大きさの2乗は

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \sin^2 \varphi \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}')^2 |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}')^2 (|\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2) \\ &= \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} (|\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2) \\ &= \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|} (|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ &= 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|}\right) \end{aligned}$$

となる。いっぽう、与式の右辺の大きさの2乗は

$$\begin{aligned} \kappa^2 |(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}|^2 &= \kappa^2 ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \\ &= 2\kappa^2 ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \\ &= 2\kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2}\right) \\ &= 2\kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{-|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})}\right) \\ &= 2\kappa^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 |\mathbf{c}|^2 \left(1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|}\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\kappa^2 = 1$$

となる。

以上より、(i)(ii)(iii)いずれの場合においても  $\kappa^2 = 1$  であることが示された。