

## フーリエ級数を用いた熱伝導方程式の解法

### 1. 熱伝導方程式

$x$ 軸方向への1次元の熱伝導を考え、ある点  $x$  における時刻  $t$  での温度を  $T(x, t)$  とする。熱流密度  $q(x, t)$  (単位断面積を単位時間に通過する熱エネルギー) が、温度勾配  $\partial T(x, t)/\partial x$  に比例するとすれば、

$$q(x, t) = -\kappa \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

ここで、 $\kappa$  は熱伝導率で、右辺の負号は高温から低温へ熱が流れることを表している。この熱流によって、 $x \sim x + \Delta x$  の領域には、時間  $t \sim t + \Delta t$  の間に  $q(x, t)\Delta t$  の熱が流入する一方、 $q(x + \Delta x, t)\Delta t$  の熱が流出することになる。したがって、その領域の温度上昇  $\Delta T(x, t)$  は、単位質量あたりの比熱を  $c$ 、密度を  $\rho$  とすると、

$$\Delta T(x, t) = \frac{1}{c\rho\Delta x} (q(x, t) - q(x + \Delta x, t))\Delta t = \frac{1}{c\rho} \left( -\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right) \Delta t$$

であるから、

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}$$

が成り立つ。

以上2式より、

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\kappa \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

すなわち、

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

が得られ、これを熱伝導方程式という。ここで、 $\alpha = \kappa/c\rho$  は温度伝導率 (あるいは温度拡散率) である。

## 2. 変数分離

温度分布  $T(x, t)$  が、位置  $x$  のみの関数  $X(x)$  と時刻  $t$  のみの関数  $Y(t)$  を用いて

$$T(x, t) = X(x)Y(t)$$

の形で表されると仮定すると、

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = X(x) \frac{dY(t)}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(t)$$

であるから、これを熱伝導方程式に代入すると

$$X(x) \frac{dY(t)}{dt} = \alpha \frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(t)$$

$$\therefore \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha Y(t)} \frac{dY(t)}{dt}$$

この式の左辺は位置  $x$  のみの関数、右辺は時刻  $t$  のみの関数であるから、これが恒等的に成り立つためには、両辺は定数でなければならない。その定数を  $\lambda$  とすると

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda X(x)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha \lambda Y(t)$$

となる。この一般解は、 $|\lambda| = k^2$  とおくと

$$X(x) = \begin{cases} A \exp(kx) + B \exp(-kx), & \text{if } \lambda > 0 \\ Ax + B, & \text{if } \lambda = 0 \\ A \cos(kx) + B \sin(kx), & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$Y(t) = \begin{cases} C \exp(\alpha \lambda t), & \text{if } \lambda \neq 0 \\ C, & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

であり、境界条件および初期条件を満たすように係数  $A, B, C$  を定めれば、解が求まることになる。

### 3. フーリエ級数を用いた解法

(例 1)

長さ  $\ell$  の棒について、時刻  $t = 0$  における温度分布の初期条件が

$$T(x, 0) = \begin{cases} \frac{2T_0}{\ell}x & \left(0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}\right) \\ \frac{2T_0}{\ell}(\ell - x) & \left(\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell\right) \end{cases}$$

であり、その後、棒の両端における境界条件を

$$T(0, t) = T(\ell, t) = 0$$

とした場合の温度分布の時間変化を求める。

(i)  $\lambda > 0$  の場合、 $\lambda = k^2$  として、前章で述べた変数分離を行ったときの一般解

$$X(x) = A \exp(kx) + B \exp(-kx)$$

が境界条件を満たすには

$$X(0) = A + B = 0$$

$$X(\ell) = A \exp(k\ell) + B \exp(-k\ell) = 0$$

より

$$A(\exp(k\ell) + \exp(-k\ell)) = 0$$

でなければならないから

$$A = B = 0$$

すなわち、

$$X(x) = 0$$

となるが、これは初期条件を満たすことができない。

(ii)  $\lambda = 0$  の場合、一般解

$$X(x) = Ax + B$$

が境界条件を満たすには

$$X(0) = B = 0$$

$$X(\ell) = A\ell + B = 0$$

より

$$A = B = 0$$

すなわち、この場合も

$$X(x) = 0$$

となり、初期条件を満たすことができない。

(iii)  $\lambda < 0$  の場合、 $\lambda = -k^2$  として、一般解

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

が境界条件を満たすには

$$X(0) = A = 0$$

$$X(\ell) = A \cos(k\ell) + B \sin(k\ell) = 0$$

より

$$A = 0, \quad k = \frac{n\pi}{\ell}$$

でなければならないから、

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$Y(t) = C \exp(\lambda t) = C \exp\left(-\alpha \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)$$

$$T(x, t) = X(x)Y(t) = BC \exp\left(-\alpha \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

となるが、これも単独では初期条件を満たさない。そこで、この式の線形結合をとって、

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

が初期条件を満たすように係数  $c_n$  を定めることにする。すなわち、

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

を満たす係数  $c_n$  を求めることになるが、この式は  $0 \leq x \leq \ell$  で定義された関数  $T(x, 0)$  のフーリエ正弦級数展開と同じであるから、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{4T_0}{\ell^2} \left( \int_0^{\ell/2} x \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \right) \\ &= \frac{4T_0}{\ell^2} \left( \left[ x \cdot \left(-\frac{\ell}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]_0^{\ell/2} + \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell/2} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \left[ (\ell - x) \cdot \left(-\frac{\ell}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]_{\ell/2}^{\ell} - \frac{\ell}{n\pi} \int_{\ell/2}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \right) \\ &= \frac{4T_0}{\ell^2} \left( -\frac{1}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]_0^{\ell/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]_{\ell/2}^{\ell} \right) \\ &= \frac{8T_0}{\ell^2} \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8u_0}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is even} \\ \frac{8T_0}{n^2\pi^2} (-1)^{(n-1)/2}, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、

$$T(x, t) = \frac{8T_0}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \exp\left(-\alpha \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{\ell} x\right)$$

となる。

(例 2)

長さ  $\ell$  の棒について、時刻  $t = 0$  における温度分布の初期条件が

$$T(x, 0) = 0$$

であり、その後、棒の両端における境界条件を

$$T(0, t) = 0, \quad T(\ell, t) = T_0$$

とした場合の温度分布の時間変化を求める。

まず、

$$u(x, t) = T(x, t) - T_0 \frac{x}{\ell}$$

とおくと、境界条件は

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0$$

となるから、例 1 と同様に、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

が初期条件を満たすように係数  $c_n$  を定めれば解が求まる。すなわち、

$$u(x, 0) = -T_0 \frac{x}{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

のフーリエ級数展開の係数  $c_n$  を求めることに帰着するから、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx = -\frac{2T_0}{\ell^2} \int_0^{\ell} x \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \\ &= -\frac{2T_0}{\ell^2} \left[ x \cdot \left(-\frac{\ell}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right]_0^{\ell} + \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \\ &= -\frac{2T_0}{\ell^2} \left( -\frac{\ell^2}{n\pi} \cos(n\pi) + \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right]_0^{\ell} \right) \\ &= \frac{2T_0}{n\pi} (-1)^n \end{aligned}$$

したがって、

$$u(x, t) = \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

であり、

$$\begin{aligned} T(x, t) &= u(x, t) + T_0 \frac{x}{\ell} \\ &= T_0 \frac{x}{\ell} + \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \end{aligned}$$

となる。

(例 3)

長さ  $\ell$  の棒について、時刻  $t = 0$  における温度分布の初期条件が

$$T(x, 0) = 0$$

であり、その後、棒の両端における境界条件を

$$T(0, t) = 0$$

$$q(\ell, t) = -\kappa \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = -q_0$$

とした場合の温度分布の時間変化を求める。

まず、

$$u(x, t) = T(x, t) - \frac{q_0}{\kappa} x$$

とにおいて、境界条件

$$u(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\ell} - \frac{q_0}{\kappa} = 0$$

および、初期条件

$$u(x, 0) = T(x, 0) - \frac{q_0}{\kappa} x = -\frac{q_0}{\kappa} x$$

を満たす解を求める。ここでも、前章で述べた変数分離を行って

$$u(x, t) = X(x)Y(t)$$

とする。

(i)  $\lambda > 0$  の場合、 $\lambda = k^2$  として、一般解

$$X(x) = A \exp(kx) + B \exp(-kx)$$

が境界条件を満たすには

$$X(0) = A + B = 0$$

$$\frac{dX(x, t)}{dx} \Big|_{x=\ell} = Ak \exp(k\ell) - Bk \exp(-k\ell) = 0$$

より

$$Ak(\exp(k\ell) + \exp(-k\ell)) = 0$$

でなければならないから

$$A = B = 0$$

すなわち、

$$X(x) = 0$$

となるが、これは初期条件

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = -\frac{q_0}{\kappa}x$$

を満たすことができない。

(ii)  $\lambda = 0$  の場合、一般解

$$X(x) = Ax + B$$

が境界条件を満たすには

$$X(0) = B = 0$$

$$\left. \frac{dX(x, t)}{dx} \right|_{x=\ell} = A = 0$$

より

$$A = B = 0$$

すなわち、この場合も

$$X(x) = 0$$

となり、初期条件を満たすことができない。

(iii)  $\lambda < 0$  の場合、 $\lambda = -k^2$  として、一般解

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

が境界条件を満たすには

$$X(0) = A = 0$$

$$\left. \frac{dX(x, t)}{dx} \right|_{x=\ell} = -Ak \sin(k\ell) + Bk \cos(k\ell) = 0$$

より

$$A = 0, \quad k = \frac{(2m+1)\pi}{2\ell}$$

でなければならないから、

$$X(x) = B \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right)$$

$$Y(t) = C \exp(\lambda t) = C \exp\left(-\alpha \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} t\right)$$

$$u(x, t) = X(x)Y(t) = BC \exp\left(-\alpha \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} t\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right)$$

となるが、これも単独では初期条件を満たさない。そこで、この式の線形結合をとって、

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \exp\left(-\alpha \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} t\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right)$$

が初期条件を満たすように係数  $c_m$  を定めることにする。すなわち、

$$u(x, 0) = -\frac{q_0}{\kappa}x = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right)$$

を満たす係数  $c_m$  を求めることになる。この式は、 $0 \leq x \leq \ell$  で定義された関数  $u(x, 0)$  を周期  $2\ell$  の正弦関数でフーリエ級数展開したものに相当するが、フーリエ級数が奇数次の正弦関数のみからなるため、 $\ell < x \leq 2\ell$  における  $u(x, 0)$  は  $x = \ell$  に関して対称になるように拡張する必要がある。したがって、

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\frac{q_0}{\kappa}x & (0 \leq x \leq \ell) \\ \frac{q_0}{\kappa}(x - 2\ell) & (\ell \leq x \leq 2\ell) \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{2}{2\ell} \int_0^{2\ell} u(x, 0) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) dx \\ &= -\frac{q_0}{\kappa\ell} \int_0^{\ell} x \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) dx + \frac{q_0}{\kappa} \int_{\ell}^{2\ell} (x - 2\ell) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) dx \\ &= -\frac{q_0}{2\kappa\ell} \left( \left[ x \cdot \left( -\frac{2\ell}{(2m+1)\pi} \right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) \right]_0^{\ell} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\ell}{(2m+1)\pi} \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) dx \right. \\ &\quad \left. - \left[ (x - 2\ell) \cdot \left( -\frac{2\ell}{(2m+1)\pi} \right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) \right]_{\ell}^{2\ell} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\ell}{(2m+1)\pi} \int_{\ell}^{2\ell} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) dx \right) \\ &= -\frac{2q_0}{\kappa\ell} \left( \frac{2\ell}{(2m+1)\pi} \right)^2 \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = -\frac{8q_0\ell}{(2m+1)^2\pi^2\kappa} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{8q_0\ell}{(2m+1)^2\pi^2\kappa} (-1)^m \end{aligned}$$

したがって、

$$u(x, t) = -\frac{8q_0\ell}{\pi^2\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \exp\left(-\alpha \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right)$$

であり、

$$\begin{aligned} T(x, t) &= u(x, t) + \frac{q_0}{\kappa}x \\ &= \frac{q_0}{\kappa}x - \frac{8q_0\ell}{\pi^2\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \exp\left(-\alpha \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right) \end{aligned}$$

となる。

参考文献

小出昭一郎「物理現象のフーリエ解析」東京大学出版会、1981

畑上到「工学基礎 フーリエ解析とその応用 新訂版」数理工学社、2014