

屈折率と群遅延

渡邊 俊夫

位相速度と群速度

波長を λ 、周波数を f とすると、波数 k と角周波数 ω は

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi f$$

である。このとき

$$v_p = \frac{\omega}{k} \text{ を 位相速度}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ を 群速度}$$

という。

位相速度は、1つの波の位相の等しい点が伝わる速度であり、
群速度は、2つの波の位相差の等しい点が伝わる速度である。

真空中の光速

光(電磁波)は、真空中では角周波数 ω によらず、位相速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

で伝わる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率である。
このとき

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

である。

真空中では、光波の位相速度は角周波数 ω に依存しないから、
群速度は位相速度に等しい。

屈折率

物質中では、光は真空中とは異なる位相速度 v_p で伝わる。
このとき、真空中の位相速度 c と物質中の位相速度 v_p との比

$$n = \frac{c}{v_p}$$

を**屈折率**という。物質中では

$$\omega = v_p k = \frac{ck}{n}$$

$$\therefore k = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

である。ここで、 λ は真空中の光の波長である。

群屈折率

屈折率 n は一般に角周波数 ω に依存するので、物質中の光波の群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{n\omega}{c} \right)} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega} (n\omega)} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

である。角周波数 ω の代わりに、真空中の波長 λ に対する依存性で表すと

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{d\lambda}{d\omega} \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{c}{n + \omega \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right) \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{c}{n - \frac{2\pi c}{\omega} \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}}$$

となる。したがって、真空中の位相速度 c と物質中の群速度 v_g との比は

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n + \omega \frac{dn}{d\omega} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

であり、これを群屈折率という。

群遅延

長さ L の物質中を、位相の等しい点が伝わるのに要する時間 τ は

$$\tau = \frac{L}{v_p} = \frac{nL}{c}$$

であり、これを遅延時間という。

また、長さ L の物質中を、位相差の等しい点が伝わるのに要する時間 τ_g は

$$\tau_g = \frac{L}{v_g} = \frac{n_g L}{c} = \frac{L}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

であり、これを群遅延時間という。

群遅延分散

群遅延時間 τ_g の波長依存性は

$$\frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{L}{c} \frac{d}{d\lambda} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) = \frac{L}{c} \left(\frac{dn}{d\lambda} - \frac{dn}{d\lambda} - \lambda \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right) = -\frac{L\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$$

であり、これを群遅延分散という。

単位長さあたりの群遅延分散は

$$D = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$$

である。

群遅延分散は、屈折率 n の波長 λ での2次微分によって決まる。屈折率の波長依存性が下に凸 ($d^2n/d\lambda^2 > 0$) のときは $D < 0$ 、屈折率の波長依存性が上に凸 ($d^2n/d\lambda^2 < 0$) のときは $D > 0$ である。

群遅延分散

群遅延分散は

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_g}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) = L \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dk}{d\omega} \right) = L \frac{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{dk}{d\omega} \right)}{\frac{d\lambda}{d\omega}} = L \frac{\frac{d^2 k}{d\omega^2}}{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right)} = -\frac{\omega^2 L}{2\pi c} \frac{d^2 k}{d\omega^2} \\ &= -\frac{\omega^2 L}{2\pi c} \left(\frac{d\lambda}{d\omega} \right)^2 \frac{d^2 k}{d\lambda^2} = -\frac{\omega^2 L}{2\pi c} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \frac{d^2 k}{d\lambda^2} = -\frac{\lambda^2 L}{2\pi c} \frac{d^2 k}{d\lambda^2} \\ &= -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d^2(kL)}{d\lambda^2} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d^2\phi}{d\lambda^2}\end{aligned}$$

と表すこともできる。ここで、 $\phi = kL$ は長さ L の物質中を伝わる間の位相変化である。