

自然放出を考慮した レーザーの静特性

渡邊 俊夫

レーザーとは

レーザー (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation: LASER) は、光共振器内に反転分布をもつ活性媒質をおくことで、誘導放出と共振によって光を増幅し、パワー密度が高くコヒーレントな(位相が揃った)光を出力するデバイスである。

半導体レーザーは、活性媒質に半導体を用いたもので、電流注入によって電子(キャリア)を励起して反転分布を形成する。

レーザーの動作

レーザーの特性は、光（フォトン）と電子（キャリア）の相互作用によって記述される。レーザー発振に寄与するフォトン数とキャリア数の時間的な変動は、次の過程で決まる。

- (1) 注入電流 I により、キャリアが増加する。
- (2) 誘導放出が単位時間あたり頻度 G で起こり、キャリアが消滅してフォトンが発生する。
- (3) 端面からの発光と導波損失により、寿命 τ_p でフォトンが消滅する。
- (4) 自然放出により、寿命 τ_s でキャリアが消滅する。その際に発生したフォトンの一部（割合 C ）が、発振モードに混入する。

キャリア密度のレート方程式

したがって、キャリア密度 N の時間変化は、光子密度を U として、次のレート方程式で表される。

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s}$$

右辺第1項は注入電流 I によるキャリアの増加を表し、 e は電子の電荷、 V は活性層の体積である。

第2項は誘導放出によるキャリアの減少を表し、 G は利得係数、 N_0 は透明キャリア密度（利得と損失がつり合うキャリア密度）である。

第3項は自然放出によるキャリアの減少を表し、 τ_s はキャリア寿命である。

フォトン密度のレート方程式

また、フォトン密度 U の時間変化は、キャリア密度を N として、次のレート方程式で表される。

$$\frac{dU}{dt} = G(N - N_0)U - \frac{U}{\tau_p} + C \frac{N}{\tau_s}$$

右辺第1項は誘導放出による光の利得を表し、 G は利得係数、 N_0 は透明キャリア密度（利得と損失がつり合うキャリア密度）である。

第2項は光の損失を表し、 τ_p はフォトン寿命である。

第3項は自然放出光の混入を表し、 C は自然放出係数、 τ_s はキャリア寿命である。

自然放出を無視した場合の解: 定常状態

自然放出光の混入を無視すると($C = 0$)、定常状態における光子密度 U のレート方程式は

$$\frac{dU}{dt} = G(N - N_0)U - \frac{U}{\tau_p} = 0$$

であるから

$$U \left(G(N - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right) = 0$$

$$\therefore U = 0 \quad \text{or} \quad N = N_0 + \frac{1}{G\tau_p}$$

第1式の $U = 0$ はレーザーが未発振の状態を表す。第2式はレーザー発振状態を表し、このときキャリア密度が一定になることを示している。

自然放出を無視した場合の解:レーザー未発振状態

定常状態におけるキャリア密度 N のレート方程式は

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s} = 0$$

であるから、これにレーザー未発振状態における光子密度 $U = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{I}{eV} - \frac{N}{\tau_s} &= 0 \\ \therefore N &= \frac{\tau_s}{eV} I\end{aligned}$$

これは、レーザー未発振の状態では、キャリア密度 N が注入電流 I に比例して増加することを示している。

自然放出を無視した場合の解:レーザ発振状態

レーザ発振状態では、キャリア密度が一定であることから、それを

$N = N_0 + \frac{1}{G\tau_p} = N_{th}$ とおく。 N_{th} は閾値キャリア密度と呼ばれる。

これを定常状態におけるキャリア密度 N のレート方程式

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s} = 0$$

に代入すると

$$\frac{I}{eV} - G \frac{1}{G\tau_p} U - \frac{N_{th}}{\tau_s} = 0$$

$$\therefore U = \tau_p \left(\frac{I}{eV} - \frac{N_{th}}{\tau_s} \right) = \frac{\tau_p}{eV} \left(I - eV \frac{N_{th}}{\tau_s} \right)$$

自然放出を無視した場合の解: 閾値電流

したがって、レーザー発振状態における光子密度は

$$U = \frac{\tau_p}{eV} \left(I - eV \frac{N_{th}}{\tau_s} \right) = \frac{\tau_p}{eV} (I - I_{th})$$

となる。ここで、

$$I_{th} = eV \frac{N_{th}}{\tau_s} = \frac{eV}{\tau_s} \left(N_0 + \frac{1}{G\tau_p} \right)$$

は閾値電流であり、 $I > I_{th}$ で $U > 0$ となりレーザー発振が起こる。

なお、 I_{th} と N_{th} を用いると、レーザー未発振状態のキャリア密度の式は

$$N = \frac{\tau_s}{eV} I = N_{th} \frac{I}{I_{th}}$$

と表すことができる。

自然放出を無視した場合の解

以上をまとめると、自然放出光の混入を無視した場合 ($C = 0$) には、キャリア密度は

$$N = \begin{cases} N_{th} \frac{I}{I_{th}}, & (I < I_{th}) \\ N_{th}, & (I > I_{th}) \end{cases}$$

光子密度は

$$U = \begin{cases} 0, & (I < I_{th}) \\ \frac{\tau_p}{eV} (I - I_{th}), & (I > I_{th}) \end{cases}$$

となる。

自然放出を考慮した場合の解

続いて、自然放出光の混入を考慮した場合 ($C \neq 0$) の解を求める。

定常状態において、キャリア密度のレート方程式は

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s} = 0$$

であり、光子密度のレート方程式は

$$\frac{dU}{dt} = G(N - N_0)U - \frac{U}{\tau_p} + C \frac{N}{\tau_s} = 0$$

である。

自然放出を考慮した場合の解: 定常状態

定常状態における光子密度のレート方程式

$$\frac{dU}{dt} = G(N - N_0)U - \frac{U}{\tau_p} + C \frac{N}{\tau_s} = 0$$

より

$$U = \frac{C \frac{N}{\tau_s}}{\frac{1}{\tau_p} - G(N - N_0)} = \frac{\frac{C}{G\tau_s} N}{\frac{1}{G\tau_p} - N + N_0} = \frac{C}{G\tau_s} \frac{N}{N_{th} - N}$$

となる。ここで、 $N_{th} = N_0 + \frac{1}{G\tau_p}$ を用いた。

自然放出を考慮した場合の解: 定常状態

定常状態における光子密度のレート方程式より得られた

$$U = \frac{C}{G\tau_s} \frac{N}{N_{th} - N}$$

をキャリア密度のレート方程式

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s} = 0$$

に代入すると

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - (N - N_0) \frac{C}{\tau_s} \frac{N}{N_{th} - N} - \frac{N}{\tau_s} = 0$$

$$\therefore \frac{I}{eV} (N_{th} - N) - \frac{C}{\tau_s} N(N - N_0) - \frac{1}{\tau_s} N(N_{th} - N) = 0$$

自然放出を考慮した場合の解: キャリア密度

定常状態におけるレート方程式より

$$\frac{I}{eV}(N_{th} - N) - \frac{C}{\tau_s}N(N - N_0) - \frac{1}{\tau_s}N(N_{th} - N) = 0$$

ここで、 $I_{th} = eV \frac{N_{th}}{\tau_s}$ を用いると

$$\frac{N_{th}I}{\tau_s I_{th}}(N_{th} - N) - \frac{C}{\tau_s}N(N - N_0) - \frac{1}{\tau_s}N(N_{th} - N) = 0$$

$$\frac{I}{I_{th}}N_{th}(N_{th} - N) - CN(N - N_0) - N(N_{th} - N) = 0$$

$$(1 - C)N^2 - \left(\left(\frac{I}{I_{th}} + 1 \right) N_{th} - CN_0 \right) N + \frac{I}{I_{th}} N_{th}^2 = 0$$

自然放出を考慮した場合の解: キャリア密度

定常状態におけるレート方程式より、キャリア密度 N についての2次方程式

$$(1 - C)N^2 - \left(\left(\frac{I}{I_{th}} + 1 \right) N_{th} - C N_0 \right) N + \frac{I}{I_{th}} N_{th}^2 = 0$$

が得られる。この解は次のようになる(詳細は【計算篇】を参照)。

$$N = \frac{N_{th}}{2(1 - C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right)$$

自然放出を考慮した場合の解: フォトン密度

同様に、定常状態におけるレート方程式より、フォトン密度 U の解は次のように求められる(詳細は【計算篇】を参照)。

$$U = \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right)$$

自然放出を考慮した場合の解: 近似式

$I \ll I_{th}$ および $I \gg I_{th}$ において、キャリア密度は

$$N \cong \begin{cases} \frac{N_{th}^2}{N_{th} - CN_0} \frac{I}{I_{th}}, & (I \ll I_{th}) \\ N_{th}, & (I \gg I_{th}) \end{cases}$$

となり、光子密度は

$$U \cong \begin{cases} C \frac{N_{th} - N_0}{N_{th} - CN_0} \frac{\tau_p}{eV} I, & (I \ll I_{th}) \\ \frac{\tau_p}{eV} (I - (1 - C)I_{th}), & (I \gg I_{th}) \end{cases}$$

となる(詳細は【計算篇】を参照)。

自然放出を考慮した場合の解

例として、 $C = 0.1$, $N_0/N_{th} = 0.5$ のとき、キャリア密度 N と光子密度 U を計算すると、下図のようになる。青色の線は $C = 0$ の場合である。

