

光増幅器の雑音

1. レート方程式

光子数が n 個の状態 $|n\rangle$ をとる確率 P_n の単位時間あたりの変化を考える。

(1) 光子 1 個あたり確率 a で誘導放出が起こり、光子数が $n+1$ 個の状態 $|n+1\rangle$ になる。

(2) 光子 1 個あたり確率 b で吸収が起こり、光子数が $n-1$ 個の状態 $|n-1\rangle$ になる。

(3) 光子数によらず確率 c で自然放出が起こり、光子数が $n+1$ 個の状態 $|n+1\rangle$ になる。

これより、

$$\begin{aligned}\frac{dP_n}{dt} &= -[(an + c) + bn]P_n + (a(n-1) + c)P_{n-1} + b(n+1)P_{n+1} \\ &= -[(a+b)n + c]P_n + (an - a + c)P_{n-1} + (bn + b)P_{n+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。確率 P_n は

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

を満たし、光子数 n の平均値は

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

で求められる。その時間変化を

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} P_n$$

と表すと、右辺の P_n の係数は

$$\begin{aligned}k_n^{(1)} &= -[(a+b)n + c]n + (a(n+1) - a + c)(n+1) + (b(n-1) + b)(n-1) \\ &= -(a+b)n^2 - cn + (an + c)(n+1) + bn(n-1) \\ &= -an^2 - bn^2 - cn + an^2 + an + cn + c + bn^2 - bn \\ &= an - bn + c = (a-b)n + c\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d\langle n \rangle}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(a-b)n + c]P_n = (a-b) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n + c \sum_{n=0}^{\infty} P_n \\ &= (a-b)\langle n \rangle + c\end{aligned}$$

となる。

同様に、光子数 n の 2 乗平均値

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n$$

の時間変化を

$$\frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)} P_n$$

と表すと、右辺の P_n の係数は

$$\begin{aligned}
 k_n^{(2)} &= -[(a+b)n+c]n^2 + (a(n+1)-a+c)(n+1)^2 + (b(n-1)+b)(n-1)^2 \\
 &= -(a+b)n^3 - cn^2 + (an+c)(n+1)^2 + bn(n-1)^2 \\
 &= -an^3 - bn^3 - cn^2 + an(n^2+2n+1) + c(n^2+2n+1) + bn(n^2-2n+1) \\
 &= 2an^2 - 2bn^2 + an + bn + 2cn + c = 2(a-b)n^2 + (a+b+2c)n + c
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} [2(a-b)n^2 + (a+b+2c)n + c]P_n \\
 &= 2(a-b) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n + (a+b+2c) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n + c \sum_{n=0}^{\infty} P_n \\
 &= 2(a-b)\langle n^2 \rangle + (a+b+2c)\langle n \rangle + c
 \end{aligned}$$

となる。

2. 光子数の平均値

光子数 n の平均値 $\langle n \rangle$ についての微分方程式

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = (a-b)\langle n \rangle + c$$

の解は

$$\frac{1}{(a-b)\langle n \rangle + c} \frac{d\langle n \rangle}{dt} = 1$$

の両辺を時間 t で積分すると

$$\frac{1}{a-b} \ln((a-b)\langle n \rangle + c) = t + \text{const.}$$

$$\therefore (a-b)\langle n \rangle + c = C e^{(a-b)t}$$

となり、初期条件を $t=0$ で $\langle n \rangle = \langle n \rangle_0$ とすると

$$(a-b)\langle n \rangle + c = ((a-b)\langle n \rangle_0 + c) e^{(a-b)t}$$

$$\therefore \langle n \rangle = \langle n \rangle_0 e^{(a-b)t} + \frac{c}{a-b} (e^{(a-b)t} - 1)$$

を得る。ここで、

$$G = e^{(a-b)t}$$

とおくと、 G は増幅器の利得を表し、

$$\langle n \rangle = \langle n \rangle_0 G + \frac{c}{a-b} (G - 1)$$

となる。右辺第1項は増幅された信号光の平均光子数、第2項は増幅された自然放出光 (Amplified Spontaneous Emission : ASE) の平均光子数を表している。

3. 光子数の2乗平均値

光子数 n の2乗平均値 $\langle n^2 \rangle$ についての微分方程式

$$\frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} = 2(a-b)\langle n^2 \rangle + (a+b+2c)\langle n \rangle + c$$

に、前節で求めた光子数 n の平均値 $\langle n \rangle$ の解を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} &= 2(a-b)\langle n^2 \rangle + (a+b+2c) \left(\langle n \rangle_0 e^{(a-b)t} + \frac{c}{a-b} (e^{(a-b)t} - 1) \right) + c \\ &= 2(a-b)\langle n^2 \rangle + (a+b+2c) \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) e^{(a-b)t} - (a+b+2c) \frac{c}{a-b} + c \\ &= 2(a-b)\langle n^2 \rangle + (a+b+2c) \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) e^{(a-b)t} - \frac{2(b+c)c}{a-b} \end{aligned}$$

となる。この微分方程式の解を求めるために、まず

$$\frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} = 2(a-b)\langle n^2 \rangle$$

の解を求めると

$$\begin{aligned} 2(a-b)\langle n^2 \rangle &= C e^{2(a-b)t} \\ \therefore \langle n^2 \rangle &= \frac{C}{2(a-b)} e^{2(a-b)t} \end{aligned}$$

となる。次に、特解を

$$\langle n^2 \rangle = C_1 e^{(a-b)t} + C_2$$

と仮定すると

$$\begin{aligned} (a-b)C_1 e^{(a-b)t} &= 2(a-b)C_1 e^{(a-b)t} + 2(a-b)C_2 + (a+b+2c) \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) e^{(a-b)t} \\ &\quad - \frac{2(b+c)c}{a-b} \end{aligned}$$

より

$$(a-b)C_1 + (a+b+2c) \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) = 0$$

かつ

$$2(a-b)C_2 - \frac{2(b+c)c}{a-b} = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) \\ C_2 &= \frac{(b+c)c}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \langle n^2 \rangle = -\frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) e^{(a-b)t} + \frac{(b+c)c}{(a-b)^2}$$

となる。したがって、求める一般解は

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \frac{C}{2(a-b)} e^{2(a-b)t} + C_1 e^{(a-b)t} + C_2 \\ &= \frac{C}{2(a-b)} e^{2(a-b)t} - \frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) e^{(a-b)t} + \frac{(b+c)c}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

であり、初期条件を $t = 0$ で $\langle n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle_0$ とすると

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle_0 &= \frac{C}{2(a-b)} - \frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) + \frac{(b+c)c}{(a-b)^2} \\ \therefore \frac{C}{2(a-b)} &= \langle n^2 \rangle_0 + \frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) - \frac{(b+c)c}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

であるから

$$\langle n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle_0 e^{2(a-b)t} + \frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) (e^{2(a-b)t} - e^{(a-b)t}) - \frac{(b+c)c}{(a-b)^2} (e^{2(a-b)t} - 1)$$

となる。前節と同様に

$$G = e^{(a-b)t}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \left(\langle n \rangle_0 + \frac{c}{a-b} \right) G(G-1) - \frac{(b+c)c}{(a-b)^2} (G^2-1) \\ &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{(a-b)^2} (G-1)((a+b+2c)G - (b+c)(G+1)) \\ &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{(a-b)^2} (G-1)((a+c)G - (b+c)) \\ &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{(a-b)^2} (G-1)((a+c)(G-1) + a-b) \\ &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{(a+c)c}{(a-b)^2} (G-1)^2 + \frac{c}{a-b} (G-1) \\ &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{(a+c)c}{(a-b)^2} (G-1)^2 \end{aligned}$$

を得る。

4. 光子数の分散

前節までの結果より、光子数の分散を求めると

$$\begin{aligned}
 \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{(a+c)c}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &\quad - \left(\langle n \rangle_0 G + \frac{c}{a-b} (G-1) \right)^2 \\
 &= \langle n^2 \rangle_0 G^2 + \frac{a+b+2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{(a+c)c}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &\quad - \langle n^2 \rangle_0 G^2 - \frac{2c}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) - \frac{c^2}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &= (\langle n^2 \rangle_0 - \langle n \rangle_0^2) G^2 + \frac{a+b}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{ac}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &= (\langle n^2 \rangle_0 - \langle n \rangle_0^2) G^2 + \frac{2a-(a-b)}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{ac}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &= (\langle n^2 \rangle_0 - \langle n \rangle_0^2) G^2 + \frac{2a}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) - \langle n \rangle_0 G(G-1) \\
 &\quad + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{ac}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &= (\langle n^2 \rangle_0 - \langle n \rangle_0^2 - \langle n \rangle_0) G^2 + \frac{2a}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \langle n \rangle_0 G \\
 &\quad + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{ac}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &= \langle n \rangle_0 G + \frac{c}{a-b} (G-1) + \frac{2a}{a-b} \langle n \rangle_0 G(G-1) + \frac{ac}{(a-b)^2} (G-1)^2 \\
 &\quad + (\langle n^2 \rangle_0 - \langle n \rangle_0^2 - \langle n \rangle_0) G^2
 \end{aligned}$$

を得る。ここで、第 1 項は信号光の平均光子数に等しく、信号光のショット雑音を表す。同様に、第 2 項は ASE の平均光子数に等しく、ASE のショット雑音を表す。これらのショット雑音は、光が連続的な波ではなく、離散的な光子であることに起因する雑音である。第 3 項は、一般に「信号光-ASE ビート雑音」と呼ばれているが、自然放出の確率 c を含んでおらず、信号光の平均光子数と ASE の平均光子数の積（の 2 倍）になっていない（ASE の平均光子数を表す式中の自然放出の確率 c を、光子 1 個あたりの誘導放出の確率 a で置き換えたものになっている）。したがって、「信号光-ASE ビート雑音」という表現は正しくない。正しい表現は「信号光が増幅される際の誘導放出の揺らぎによる雑音」である。同様に、一般に「ASE-ASE ビート雑音」と呼ばれている第 4 項も、ASE の平均光子数の 2 乗ではないから、正しい表現は「ASE が増幅される際の誘導放出の揺らぎによる雑音」である。なお、第 5 項は過剰雑音を表す。

参考文献

石尾秀樹 監修「光増幅器とその応用」オーム社、1992

K. Shimoda, H. Takahashi, and C. H. Townes, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 686 (1957)

E. Desurvire, “Erbium-Doped Fiber Amplifiers,” John Wiley & Sons, 1994