

自然放出を考慮したレーザーの静特性

1. レート方程式

レーザーは、光共振器内に反転分布をもつ活性媒質をおくことで、誘導放出と共振によって光を増幅し、パワー密度が高くコヒーレントな（位相が揃った）光を出力するデバイスである。半導体レーザーは、活性媒質に半導体を用いたもので、電流注入によって電子（キャリア）を励起して反転分布を形成する。

レーザーの特性は、光（フォトン）と電子（キャリア）の相互作用によって記述される。レーザー発振に寄与するフォトン数とキャリア数の時間的な変動は、次の過程で決まる。

- (1) 注入電流 I により、キャリアが増加する。
- (2) 誘導放出が単位時間あたり頻度 G で起こり、キャリアが消滅してフォトンが発生する。
- (3) 端面からの発光と導波損失により、寿命 τ_p でフォトンが消滅する。
- (4) 自然放出により、寿命 τ_s でキャリアが消滅する。その際に発生したフォトンの一部（割合 C ）が、発振モードに混入する。

したがって、キャリア密度を N 、フォトン密度を U とすると、それぞれの時間変化は

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s}$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{\tau_p} + G(N - N_0)U + C\frac{N}{\tau_s}$$

と表され、これをレート方程式という。ここで、

N_0 : 透明キャリア密度（利得と損失がつり合うキャリア密度）

e : キャリアの電荷

V : 活性層の体積

である。レート方程式は、誘導放出に起因する $G(N - N_0)U$ の項を含んでおり、 N と U に関して非線形な方程式である。

2. 自然放出が無視できる場合

まず、簡単のため、 $C = 0$ の場合を考える。定常状態におけるレート方程式は

$$\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s}$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 = -\frac{U}{\tau_p} + G(N - N_0)U = -\left(\frac{1}{\tau_p} - G(N - N_0)\right)U$$

となるから、第2式より

$$U = 0$$

または

$$N = N_0 + \frac{1}{G\tau_p}$$

である。

(i) $U = 0$ のとき、第 1 式より

$$N = \frac{\tau_s}{eV} I$$

となる。これは、キャリア密度 N は注入電流 I に比例して増加するが、レーザー発振には至らずフォトン密度 $U = 0$ であることを表す。

(ii) 一方、

$$N = N_0 + \frac{1}{G\tau_p} = N_{th}$$

のときは、第 1 式より

$$U = \tau_p \left(\frac{I}{eV} - \frac{N_{th}}{\tau_s} \right) = \frac{\tau_p}{eV} \left(I - eV \frac{N_{th}}{\tau_s} \right) = \frac{\tau_p}{eV} (I - I_{th}) = \frac{\tau_p}{\tau_s} N_{th} \frac{I - I_{th}}{I_{th}}$$

となる。これは、フォトン密度 U は注入電流 I に対して線形に増大するが、キャリア密度 N は I によらず一定値 $N = N_{th}$ となることを示す。この N_{th} を閾値キャリア密度といい、

$$I_{th} = eV \frac{N_{th}}{\tau_s}$$

を閾値電流という。

(i)で得られた N は $I = I_{th}$ で $N = N_{th}$ となり、(ii)で得られた U は $I = I_{th}$ で $U = 0$ となるから、 $C = 0$ の場合のレート方程式の定常解は

$$N = \begin{cases} N_{th} \frac{I}{I_{th}}, & (I < I_{th}) \\ N_{th}, & (I > I_{th}) \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} 0, & (I < I_{th}) \\ \frac{\tau_p}{eV} (I - I_{th}), & (I > I_{th}) \end{cases}$$

となる。

3. 自然放出を考慮した場合

続いて、 $C \neq 0$ の場合を考える。定常状態におけるレート方程式は

$$\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{I}{eV} - G(N - N_0)U - \frac{N}{\tau_s}$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 = -\frac{U}{\tau_p} + G(N - N_0)U + C \frac{N}{\tau_s}$$

となる。

(i) キャリア密度

定常状態におけるレート方程式の第 2 式より得られる

$$U = \frac{\frac{C}{\tau_s} N}{\frac{1}{\tau_p} - G(N - N_0)} = \frac{\frac{C}{\tau_s} N}{\frac{1}{G\tau_p} - N + N_0} = \frac{C}{\tau_s} \frac{N}{G(N_{th} - N)}$$

を第 1 式に代入すると

$$0 = \frac{I}{eV} - G(N - N_0) \frac{C}{\tau_s} \frac{N}{G(N_{th} - N)} - \frac{N}{\tau_s}$$

より

$$0 = \frac{I}{eV} (N_{th} - N) - \frac{C}{\tau_s} (N - N_0) N - \frac{1}{\tau_s} N (N_{th} - N)$$

となる。ここで

$$I_{th} = eV \frac{N_{th}}{\tau_s}$$

より

$$\frac{I}{eV} = I \frac{N_{th}}{\tau_s I_{th}} = \frac{I}{I_{th}} \frac{N_{th}}{\tau_s}$$

であるから

$$0 = \frac{I}{I_{th}} \frac{N_{th}}{\tau_s} (N_{th} - N) - \frac{C}{\tau_s} (N - N_0) N - \frac{1}{\tau_s} N (N_{th} - N)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{I}{I_{th}} N_{th} (N_{th} - N) - C(N - N_0) N - N(N_{th} - N) \\ &= \frac{I}{I_{th}} N_{th}^2 - \frac{I}{I_{th}} N_{th} N - C N^2 + C N_0 N - N_{th} N + N^2 \\ &= (1 - C) N^2 - \left(\frac{I}{I_{th}} N_{th} + N_{th} - C N_0 \right) N + \frac{I}{I_{th}} N_{th}^2 \\ \therefore (1 - C) \left(\frac{N}{N_{th}} \right)^2 - \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \frac{N}{N_{th}} + \frac{I}{I_{th}} &= 0 \end{aligned}$$

これを解くと

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_{th}} &= \frac{1}{2(1 - C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 - 4(1 - C) \frac{I}{I_{th}}} \right) \\ \therefore N &= \frac{N_{th}}{2(1 - C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 - 4(1 - C) \frac{I}{I_{th}}} \right) \end{aligned}$$

となり、 $I = 0$ のとき $N = 0$ となる負号の解をとると

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 - 4(1-C) \frac{I}{I_{th}}} \right) \\
 &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 + 2 \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - 2(1-C) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\
 &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right)
 \end{aligned}$$

を得る。

これより、 $I \ll I_{th}$ のときは

$$\begin{aligned}
 N &\cong \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \sqrt{1 - 2 \frac{1 - C(2 - N_0/N_{th})}{(1 - C N_0/N_{th})^2} \frac{I}{I_{th}}} \right) \\
 &\cong \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \left(1 - \frac{1 - C(2 - N_0/N_{th})}{(1 - C N_0/N_{th})^2} \frac{I}{I_{th}} \right) \right) \\
 &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + \frac{1 - C(2 - N_0/N_{th})}{1 - C N_0/N_{th}} \frac{I}{I_{th}} \right) \\
 &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \frac{1 - C \frac{N_0}{N_{th}} + 1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right)}{1 - C \frac{N_0}{N_{th}}} \frac{I}{I_{th}} = \frac{N_{th}}{2(1-C)} \frac{2 - 2C}{1 - C N_0/N_{th}} \frac{I}{I_{th}} \\
 &= \frac{N_{th}}{1 - C N_0/N_{th}} \frac{I}{I_{th}} = \frac{N_{th}^2}{N_{th} - C N_0} \frac{I}{I_{th}}
 \end{aligned}$$

となる。一方、 $I \gg I_{th}$ のときは

$$\begin{aligned}
 N &\cong \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \frac{I}{I_{th}} \sqrt{1 - 2 \frac{1 - C(2 - N_0/N_{th})}{I/I_{th}}} \right) \\
 &\cong \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(\frac{I}{I_{th}} + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \frac{I}{I_{th}} \left(1 - \frac{1 - C(2 - N_0/N_{th})}{I/I_{th}} \right) \right) \\
 &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} + 1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) \\
 &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} (2 - 2C) = N_{th}
 \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $C \neq 0$ の場合は、 $I \ll I_{th}$ における定常状態のキャリア密度が $C = 0$ の場合に比べて $N_{th}/(N_{th} - C N_0)$ 倍になるが、 $I \gg I_{th}$ では $C = 0$ の場合と同様 $N = N_{th}$ に漸近する。また、 $I = I_{th}$ においては

$$\begin{aligned}
N &= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(1 + 1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{1 - 2 \left(1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\
&= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(2 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{-1 + 2C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) + 1 - 2C \frac{N_0}{N_{th}} + C^2 \left(\frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\
&= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(2 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{4C - 4C \frac{N_0}{N_{th}} + C^2 \left(\frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\
&= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(2 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{4C - 4 + 4 - 4C \frac{N_0}{N_{th}} + C^2 \left(\frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\
&= \frac{N_{th}}{2(1-C)} \left(2 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \sqrt{\left(2 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 - 4(1-C)} \right)
\end{aligned}$$

となる。

(ii) フォトン密度

定常状態のレート方程式の第2式より得られる

$$N = \frac{G \left(N_0 + \frac{1}{G\tau_p} \right) U}{GU + \frac{C}{\tau_s}} = \frac{N_{th}U}{U + \frac{C}{G\tau_s}}$$

を第1式に代入すると

$$0 = \frac{I}{eV} - \frac{1}{\tau_s} \frac{N_{th}U}{U + \frac{C}{G\tau_s}} - G \left(\frac{N_{th}U}{U + \frac{C}{G\tau_s}} - N_0 \right) U$$

より

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{I}{eV} \left(U + \frac{C}{G\tau_s} \right) - \frac{N_{th}}{\tau_s} U - G \left(N_{th}U - N_0 \left(U + \frac{C}{G\tau_s} \right) \right) U \\
&= \frac{I}{eV} U + \frac{C}{G\tau_s} \frac{I}{eV} - \frac{N_{th}}{\tau_s} U - G(N_{th} - N_0)U^2 + \frac{CN_0}{\tau_s} U \\
&= \frac{C}{G\tau_s} \frac{I}{eV} + \left(\frac{I}{eV} - \frac{N_{th} - CN_0}{\tau_s} \right) U - \frac{1}{\tau_p} U^2
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$I_{th} = eV \frac{N_{th}}{\tau_s}$$

より

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{I_{th}}{N_{th}eV}$$

であるから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{C}{G} \frac{I_{th}}{N_{th}eV} \frac{I}{eV} + \left(\frac{I}{eV} - \frac{I_{th}}{N_{th}eV} (N_{th} - CN_0) \right) U - \frac{1}{\tau_p} U^2 \\ &= \frac{C}{GN_{th}} \left(\frac{I_{th}}{eV} \right)^2 \frac{I}{I_{th}} + \frac{I_{th}}{eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \right) U - \frac{1}{\tau_p} U^2 \\ \therefore \frac{1}{\tau_p} U^2 - \frac{I_{th}}{eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \right) U - \frac{C}{GN_{th}} \left(\frac{I_{th}}{eV} \right)^2 \frac{I}{I_{th}} &= 0 \end{aligned}$$

となる。これを解くと

$$\begin{aligned} U &= \frac{\tau_p}{2} \left(\frac{I_{th}}{eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_{th}}{eV} \right)^2 \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 + \frac{4C}{G\tau_p N_{th}} \left(\frac{I_{th}}{eV} \right)^2 \frac{I}{I_{th}}} \right) \\ &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 + \frac{4C}{N_{th}G\tau_p} \frac{I}{I_{th}}} \right) \end{aligned}$$

となり、 $I = 0$ のとき $U = 0$ となる正号の解をとると

$$\begin{aligned} U &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 + \frac{4C}{N_{th}G\tau_p} \frac{I}{I_{th}}} \right) \\ &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 + \frac{4C}{N_{th}G\tau_p} \frac{I}{I_{th}}} \right) \\ &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \frac{2C}{N_{th}G\tau_p} \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{C}{N_{th}} \left(N_0 + \frac{2}{G\tau_p} \right) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{C}{N_{th}} (2N_{th} - N_0) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(\frac{I}{I_{th}} \right)^2 - 2 \left(1 - C \left(2 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) \frac{I}{I_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

を得る。

これより、 $I \ll I_{th}$ のときは

$$\begin{aligned}
 U &\cong \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \sqrt{1 - 2 \frac{1 - 2C + C N_0/N_{th}}{(1 - C N_0/N_{th})^2} \frac{I}{I_{th}}} \right) \\
 &\cong \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \left(1 - \frac{1 - 2C + C N_0/N_{th}}{(1 - C N_0/N_{th})^2} \frac{I}{I_{th}} \right) \right) \\
 &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - \frac{1 - 2C + C N_0/N_{th}}{1 - C N_0/N_{th}} \frac{I}{I_{th}} \right) \\
 &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \frac{1 - C \frac{N_0}{N_{th}} - \left(1 - 2C + C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \frac{I}{I_{th}}}{1 - C \frac{N_0}{N_{th}}} = \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \frac{2C - 2C \frac{N_0}{N_{th}} \frac{I}{I_{th}}}{1 - C \frac{N_0}{N_{th}}} \\
 &= \frac{\tau_p I_{th} C}{eV} \frac{1 - \frac{N_0}{N_{th}} \frac{I}{I_{th}}}{1 - C \frac{N_0}{N_{th}}} = C \frac{N_{th} - N_0}{N_{th} - C N_0} \frac{\tau_p}{eV} I \\
 &= C \frac{\frac{1}{G\tau_p}}{N_{th} - C N_0} \frac{\tau_p}{eV} I = \frac{C}{G(N_{th} - C N_0)} \frac{I}{eV}
 \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $C \neq 0$ の場合は、 $I < I_{th}$ でも $U = 0$ ではなく、 I に比例してわずかに増加する。

一方、 $I \gg I_{th}$ のときは

$$\begin{aligned}
 U &\cong \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \frac{I}{I_{th}} \sqrt{1 - 2 \frac{1 - 2C + C N_0/N_{th}}{I/I_{th}}} \right) \\
 &\cong \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \frac{I}{I_{th}} \left(1 - \frac{1 - 2C + C N_0/N_{th}}{I/I_{th}} \right) \right) \\
 &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{2I}{I_{th}} - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} - \left(1 - 2C + C \frac{N_0}{N_{th}} \right) \right) = \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{2I}{I_{th}} - 2 + 2C \right) \\
 &= \frac{\tau_p I_{th}}{2eV} \left(\frac{I}{I_{th}} - (1 - C) \right) \\
 &= \frac{\tau_p}{eV} (I - (1 - C)I_{th})
 \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $I \gg I_{th}$ における U と I の線形関係の傾き dU/dI は C によらず同じであるが、その直線が $U = 0$ と交わるときの注入電流の値を実効閾値電流 $\hat{I}_{th}$ と定義して

$$U = \frac{\tau_p}{eV} (I - \hat{I}_{th})$$

と表すと

$$\hat{I}_{th} = (1 - C)I_{th}$$

となり、 $\hat{I}_{th}$ は C が大きくなるほど減少する。

また、 $I = I_{th}$ においては

$$\begin{aligned} U &= \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(1 - 1 + C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{1 - 2 \left(1 - 2C + C \frac{N_0}{N_{th}} \right) + \left(1 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{-1 + 4C - 2C \frac{N_0}{N_{th}} + 1 - 2C \frac{N_0}{N_{th}} + C^2 \left(\frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{4C \left(1 - \frac{N_0}{N_{th}} \right) + C^2 \left(\frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{4C - 4 + 4 - 4C \frac{N_0}{N_{th}} + C^2 \left(\frac{N_0}{N_{th}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{I_{th}\tau_p}{2eV} \left(C \frac{N_0}{N_{th}} + \sqrt{\left(2 - C \frac{N_0}{N_{th}} \right)^2 - 4(1 - C)} \right) \end{aligned}$$

となる。

参考文献

- 土屋治彦、三上修 編著「半導体フォトニクス工学」コロナ社、1995
 末松安晴、伊賀健一「光ファイバ通信入門（改訂4版）」オーム社、2006
 山本杲也「光ファイバ通信技術」日刊工業新聞社、1995