階乗を含む方程式

渡邉 俊夫

問題

整数 n についての方程式

$$n! = n^3 - n$$

の解を求めなさい。ただし、$n \geq 0$ とする。

解

$$n! = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

$0! = 1, 0^3 - 0 = 0$ より、$n = 0$ は解でない。

$1! = 1, 1^3 - 1 = 0$ より、$n = 1$ も解でない。

$2! = 2, 2^3 - 2 = 6$ より、$n = 2$ も解でない。

よって、$n \neq 0, 1, 2$ であるから、両辺を $n(n-1)(n-2)$ で割ると

$$(n-3)! = \frac{n+1}{n-2} = \frac{(n-2)+3}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2}$$

ここで、左辺は整数であるから、$n - 2 = 1 \text{ or } 3 \quad \therefore n = 3 \text{ or } 5$

しかし、$3! = 6, 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$ より、$n = 3$ は解でない。

$5! = 120, 5^3 - 5 = 125 - 5 = 120$ より、$n = 5$ が求める解である。

検算

$$n! = n^3 - n = (n+1)n(n-1)$$

$n = 5$ のとき

$$n! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$(n+1)n(n-1) = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$3 \cdot 2 = 6$ だから、確かに両辺は等しい。

問題(改)

実数 x についての方程式

$$x! = x^3 - x$$

の解を求めなさい。ただし、$x \geq 0$ とする。

解

実数 x の階乗は、ガンマ関数を用いて

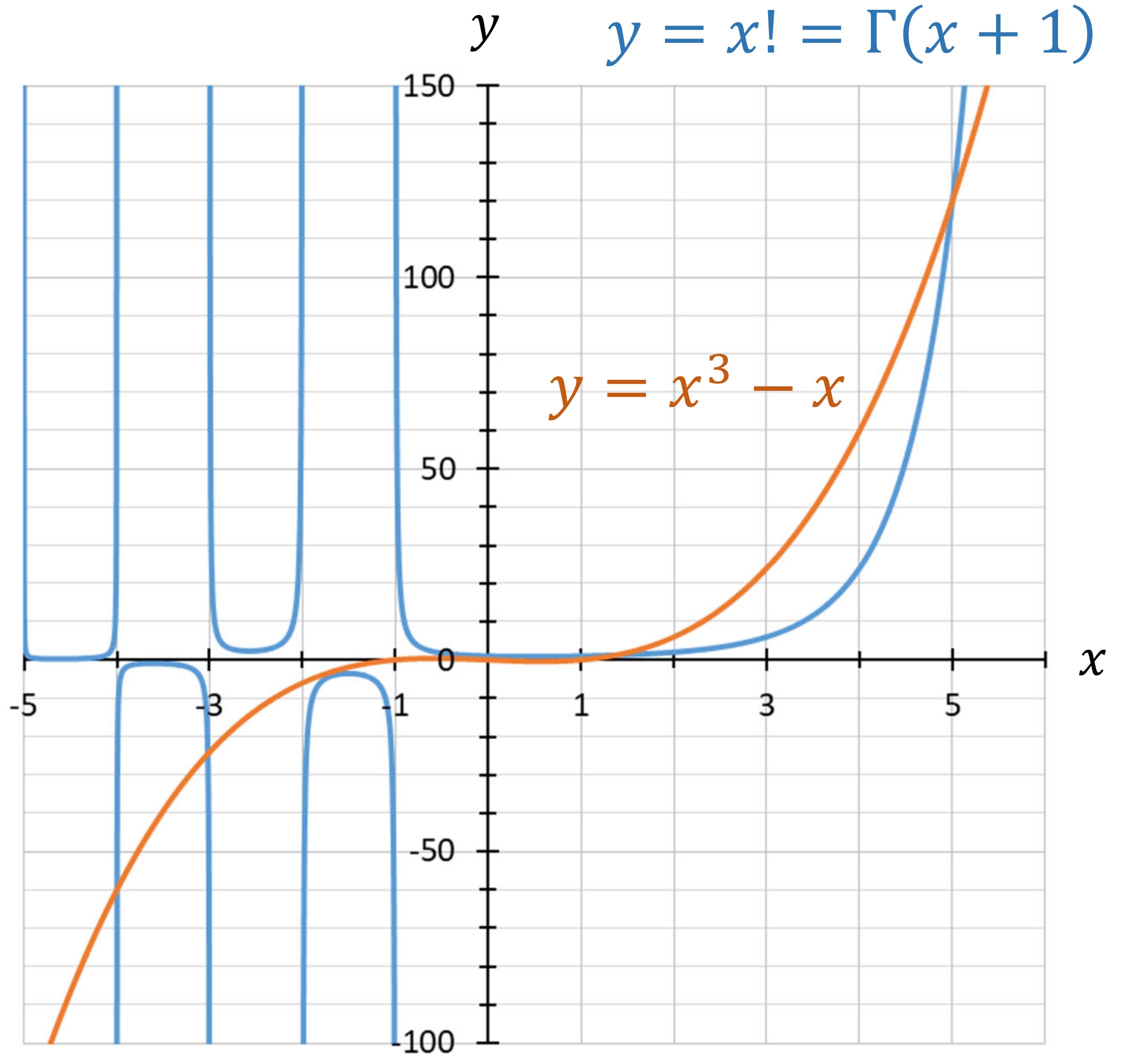
$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

で表される。

$y = x! = \Gamma(x+1)$ と $y = x^3 - x$ の

グラフは右図のようになり、

$(x, y) = (5, 120)$ に交点をもつ。



解

$y = x! = \Gamma(x+1)$ と $y = x^3 - x$ のグラフを拡大すると、$1 < x < 2$ にもう1つ交点があることがわかる。

解を数値的に求めると

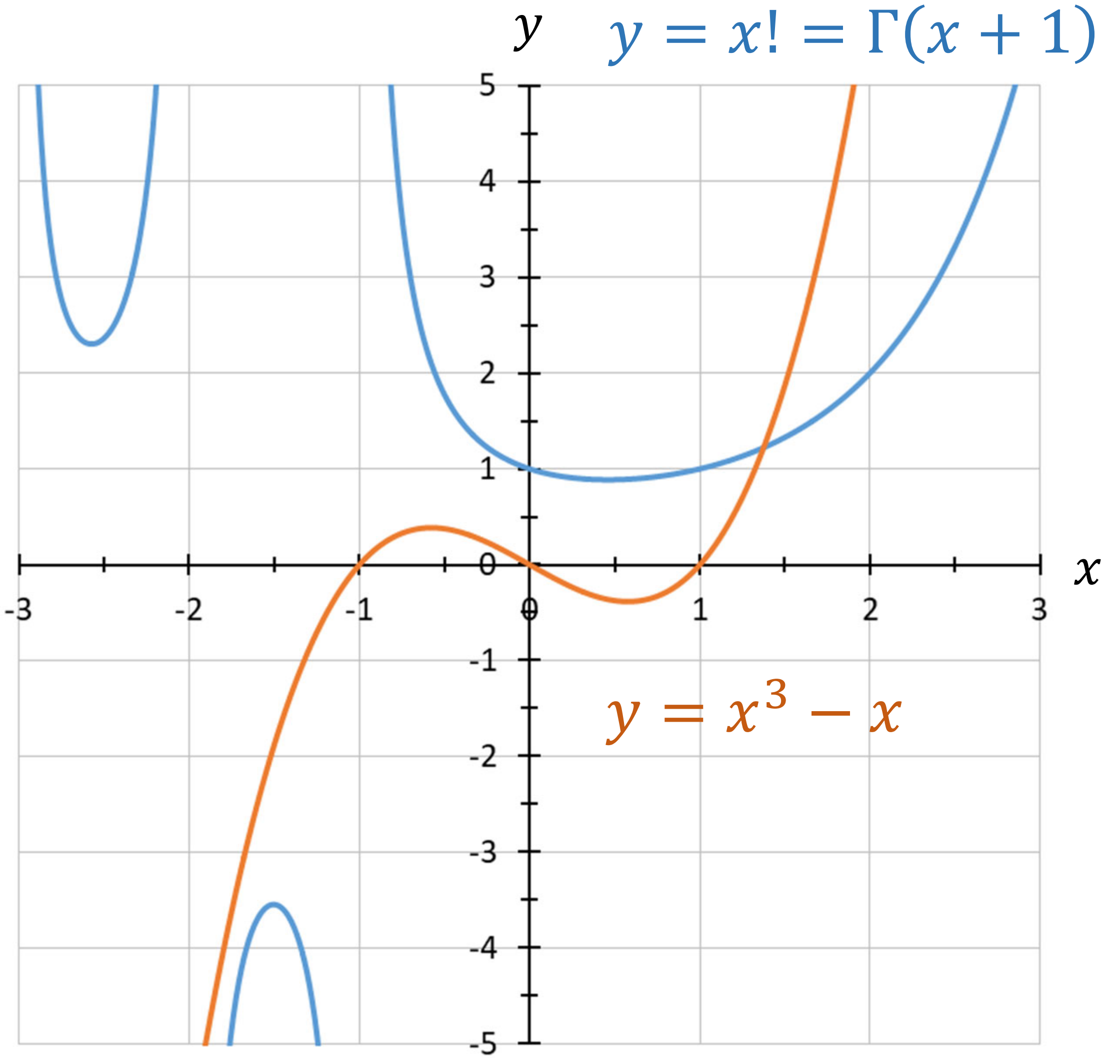
$$x = 1.374395 \ldots$$

$$y = 1.221782 \ldots$$

となる。したがって、$x \geq 0$ における

$$x! = x^3 - x$$

の解は $x = 5$ と $x = 1.374395 \ldots$ である。



検算

$$x! = \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

であるから、$x \neq 0$ より

$$\Gamma(x+1) = x^3 - x$$

の両辺を x で割ると

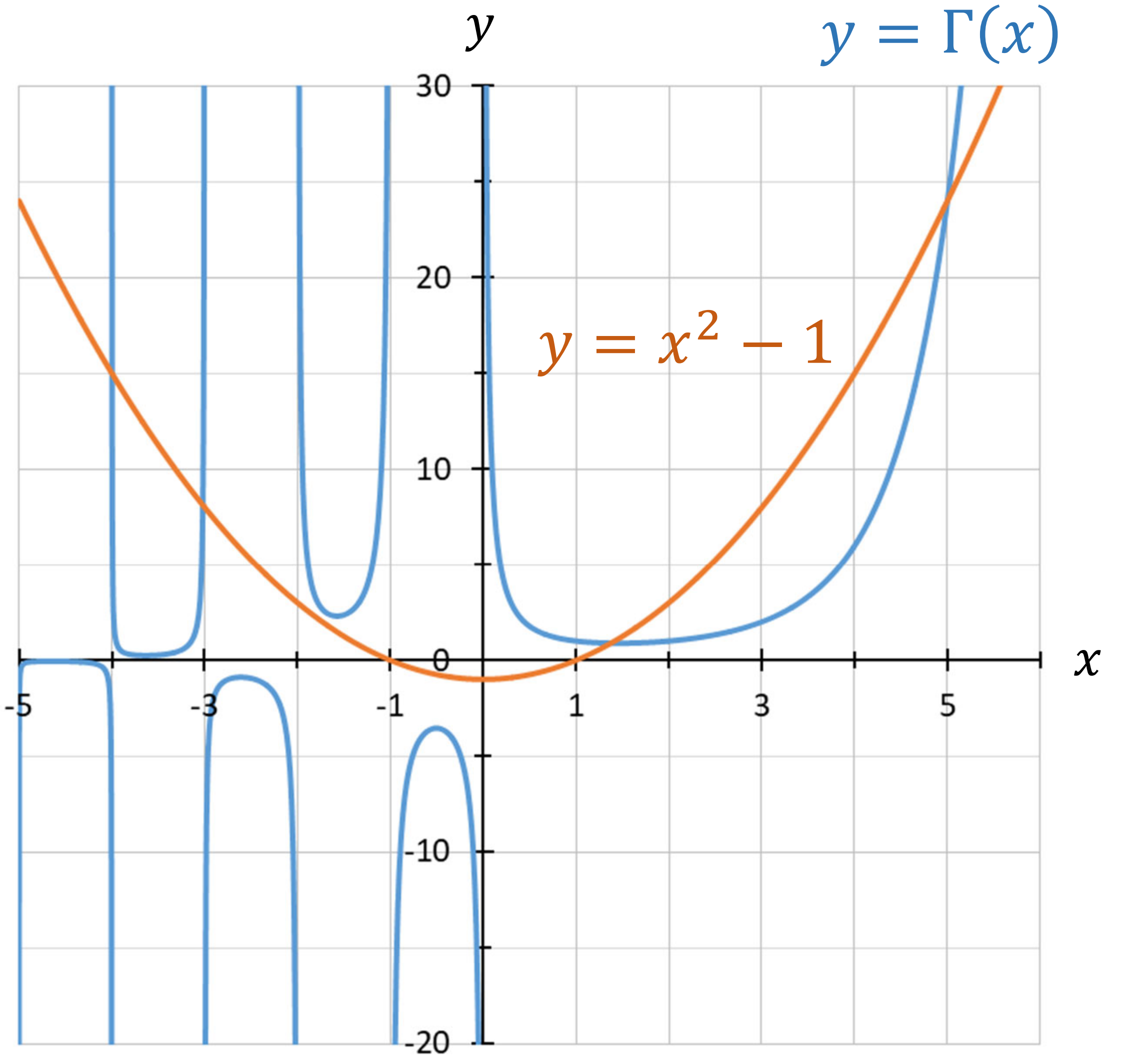
$$\Gamma(x) = x^2 - 1$$

となる。$y = \Gamma(x)$ と $y = x^2 - 1$ のグラフは $x \geq 0$ において、2つの交点

$$(x, y) = (5, 24),$$

$$(1.374395\ldots, 0.888961\ldots)$$

をもつ。



検算

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

であるから、$x \neq 1$ より

$$\Gamma(x) = x^2 - 1$$

の両辺を $x-1$ で割ると

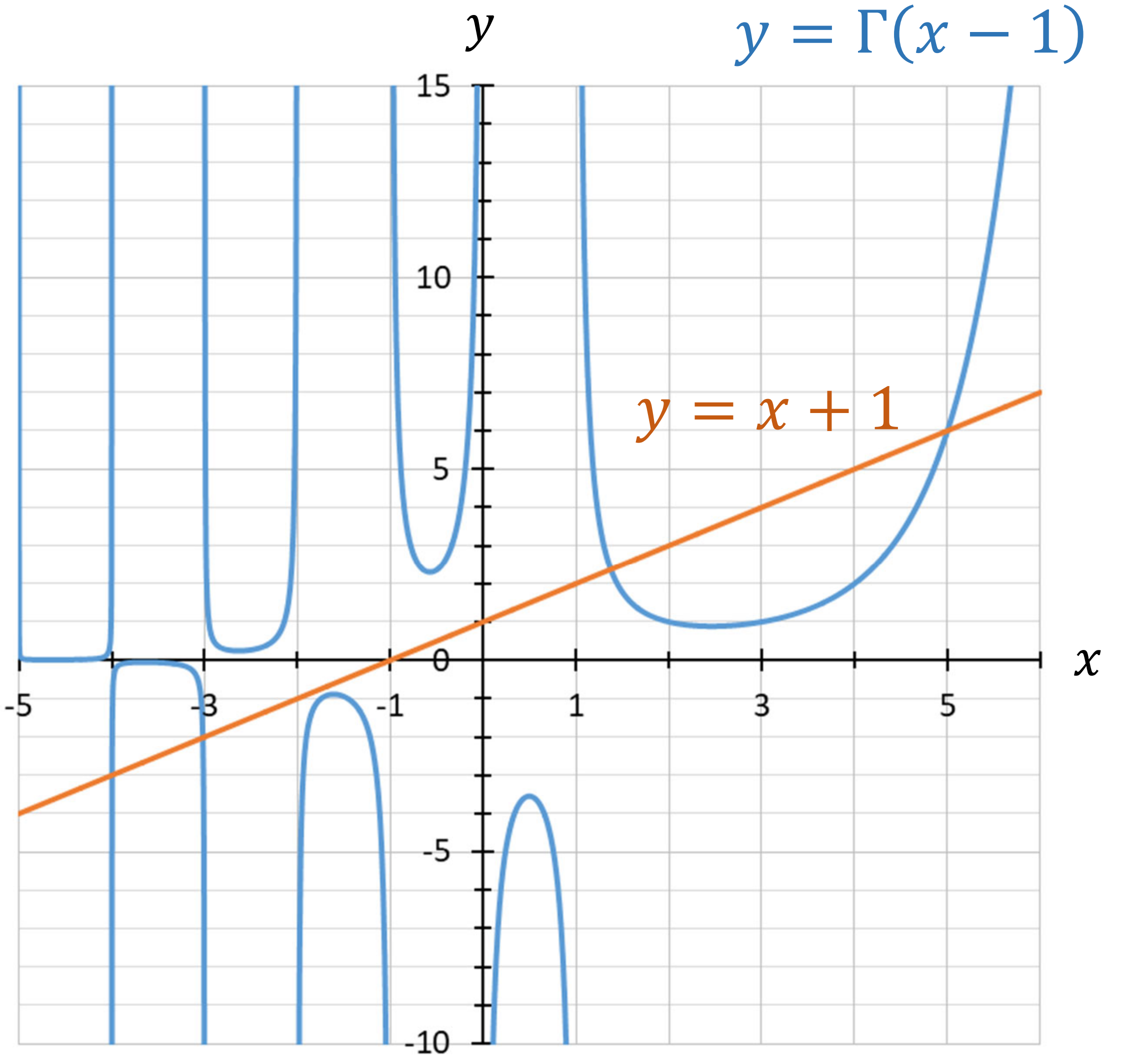
$$\Gamma(x-1) = x+1$$

となる。$y = \Gamma(x-1)$ と $y = x+1$ のグラフは $x \geq 0$ において、2つの交点

$$(x, y) = (5, 6),$$

$$(1.374395\ldots, 2.374395\ldots)$$

をもつ。



付録：ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

で定義される。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = [-t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= (x-1)\Gamma(x-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty = 1$$

より、正の整数 n に対して、$\Gamma(n) = (n-1)!$ である。

付録：ガンマ関数

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$t = u^2$ とおくと

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u} 2u\mathrm{d}u = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

二重階乗

$$(2m-1)!! = (2m-1)\cdot(2m-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$$

これより、正の整数 m に対して

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{2m-1}{2}\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}$$

付録：ガンマ関数

正の整数 m に対して

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}$$

より

$$0.5!=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.8862269\ldots$$

$$1.5!=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=1.329340\ldots$$

二重階乗

$$(2m-1)!!=(2m-1)\cdot(2m-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1$$