球の体積
ー線積分・面積分・体積分ー

渡邉 俊夫

線積分：回転体の体積

原点を中心とする半径 a の球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ において、z 軸に垂直な断面は半径が $R=\sqrt{a^2-z^2}$ の円である。その面積 S を $z=-a$ から $z=a$ まで積分すると、球の体積 V は

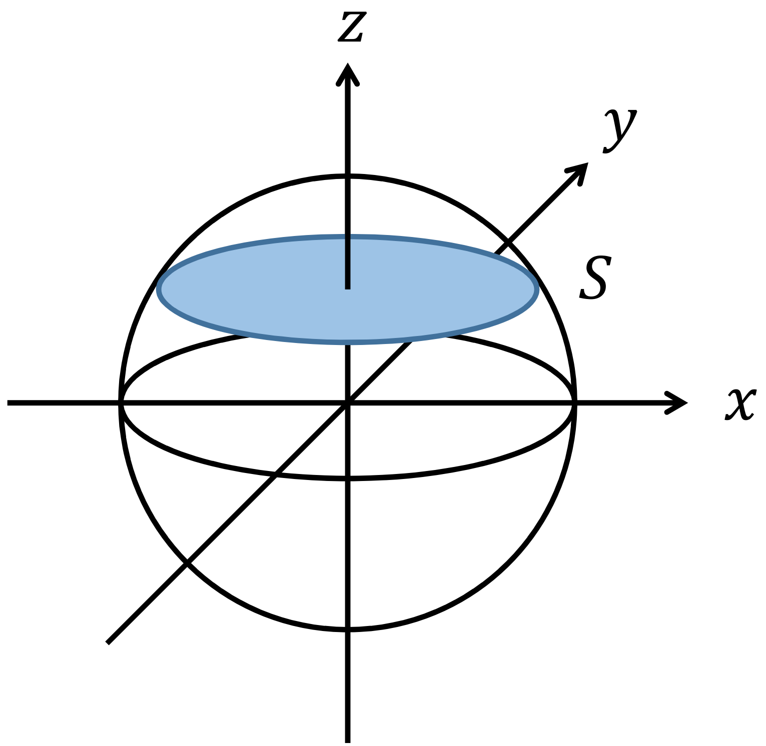
$$V=\int S dz=\int_{-a}^{a}\pi R^2 dz=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-z^2)dz$$

$$=2\int_{0}^{a}\pi(a^2-z^2)dz$$

$$=2\pi\left[a^2z-\frac{z^3}{3}\right]_0^a=2\pi\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)$$

$$=2\pi\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{4\pi}{3}a^3$$

となる。



面積分

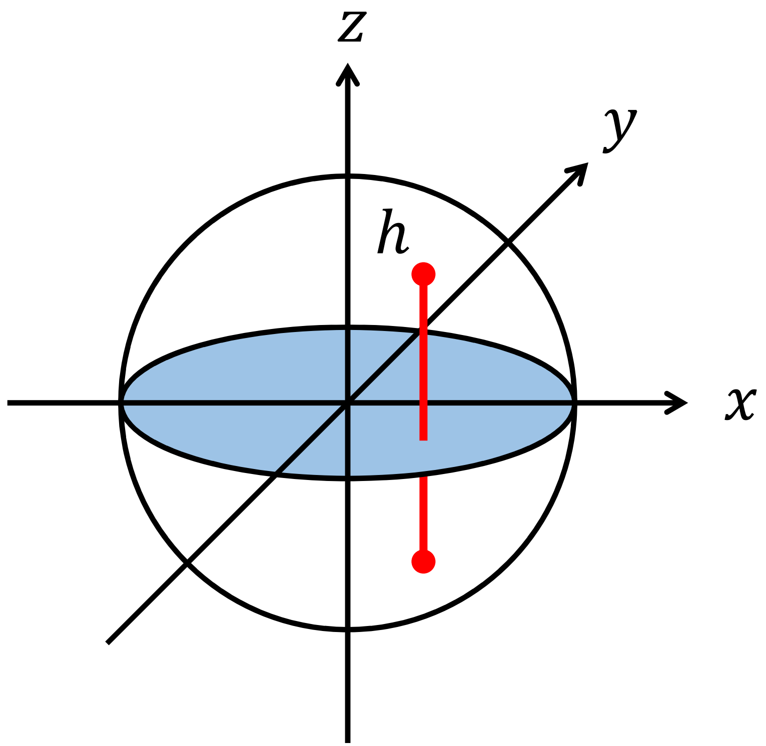
原点を中心とする半径 a の球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ において、xy 平面上の位置 (x,y) での高さ $h=2\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ を xy 平面上の円 $x^2+y^2=a^2$ の内部で面積分する。

x を先に積分するとき、積分範囲は $-\sqrt{a^2-y^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2}, -a\le y\le a$ だから球の体積 V は

$$V=\iint hdS=\int_{y=-a}^{y=a}\int_{x=-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=\sqrt{a^2-y^2}}hdx\,dy$$

$$=2\int_{y=-a}^{y=a}\int_{x=-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dx\,dy$$

$$=2\int_{-a}^{a}\left(2\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{(a^2-y^2)-x^2}dx\right)dy$$



面積分

ここで、$x = \sqrt{a^2 - y^2}\sin\theta$ とおくと、$dx = \sqrt{a^2 - y^2}\cos\theta\, d\theta$ より

$$2\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{(a^2 - y^2) - x^2}dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2 - y^2)(1 - \sin^2\theta)} \cdot \sqrt{a^2 - y^2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (a^2 - y^2)\cos^2\theta\, d\theta = 2(a^2 - y^2)\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2(a^2 - y^2)\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = (a^2 - y^2)\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= (a^2 - y^2)\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = (a^2 - y^2) \cdot \frac{\pi}{2}$$

面積分

したがって、

$$V=\int_{y=-a}^{y=a}\int_{x=-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=\sqrt{a^2-y^2}}2z dx\,dy=2\int_{y=-a}^{y=a}\int_{x=-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dx\,dy$$

$$=2\int_{-a}^{a}\left(2\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{(a^2-y^2)-x^2}dx\right)dy$$

$$=2\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)\cdot\frac{\pi}{2}dy=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-y^2)dy=2\int_{0}^{a}\pi(a^2-y^2)dy$$

これは前述の線積分と同じであり、

$$V=2\pi\left[a^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^a=2\pi\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=2\pi\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{4\pi}{3}a^3$$

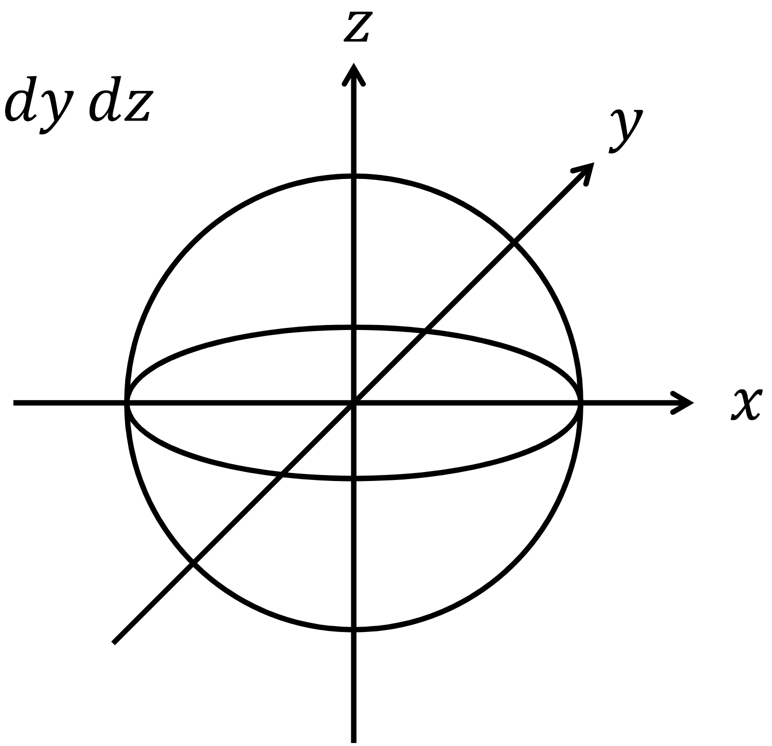
となる。

体積分

原点を中心とする半径 a の球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部で、微小体積 $dxdydz$ を積分する。x,y,z の順で積分するとき、積分範囲は $-\sqrt{a^2-y^2-z^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2-z^2}$, $-\sqrt{a^2-z^2}\le y\le\sqrt{a^2-z^2}, -a\le z\le a$ だから、球の体積 V は

$$V=\iiint dV=\int_{z=-a}^{z=a}\int_{y=-\sqrt{a^2-z^2}}^{y=\sqrt{a^2-z^2}}\int_{x=-\sqrt{a^2-y^2-z^2}}^{x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}}dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{z=-a}^{z=a}\int_{y=-\sqrt{a^2-z^2}}^{y=\sqrt{a^2-z^2}}2\sqrt{a^2-y^2-z^2}dy\,dz$$



これは前述の面積分と同じであり、

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3$$

となる。

体積分：極座標

xyz 空間内の点の位置 (x, y, z) を、媒介変数 r, θ, φ によって

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\cos\theta$$

と表す。媒介変数 r, θ, φ が微小変化すると、点の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ は

それぞれ $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}dr, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}d\theta, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}d\varphi$ だけ変化するから、それらがつくる微小体積 dV は、

スカラー三重積を用いて

$$dV = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right)\right| dr d\theta d\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} dr d\theta d\varphi$$

で表される。

体積分:極座標

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r\cos\theta\,\boldsymbol{k}$ に対して

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - r\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j}$$

だから

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin^2\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r^2\cos\theta\sin\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\boldsymbol{k}$$

$$= r^2\sin^2\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r^2\cos\theta\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

体積分:極座標

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r\cos\theta\,\boldsymbol{k}$ に対して

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right) = (\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k})$$

$$\cdot\,(r^2\sin^2\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r^2\cos\theta\sin\theta\,\boldsymbol{k})$$

$$= r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r^2\sin^3\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r^2\sin^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r^2\sin\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= r^2\sin\theta$$

$$\therefore\ dV = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right)\right| drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

体積分：極座標

原点を中心とする半径 a の球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部で、微小体積 dV を積分するとき、媒介変数 r, θ, φ の積分範囲は $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$ だから、球の体積 V は

$$V = \iiint dV = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=a} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{a} r^2 dr$$

$$= [\varphi]_0^{2\pi} \; [-\cos\theta]_0^{\pi} \; \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a}$$

$$= 2\pi \cdot \big(1-(-1)\big) \cdot \frac{a^3}{3} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4\pi}{3} a^3$$

となる。