

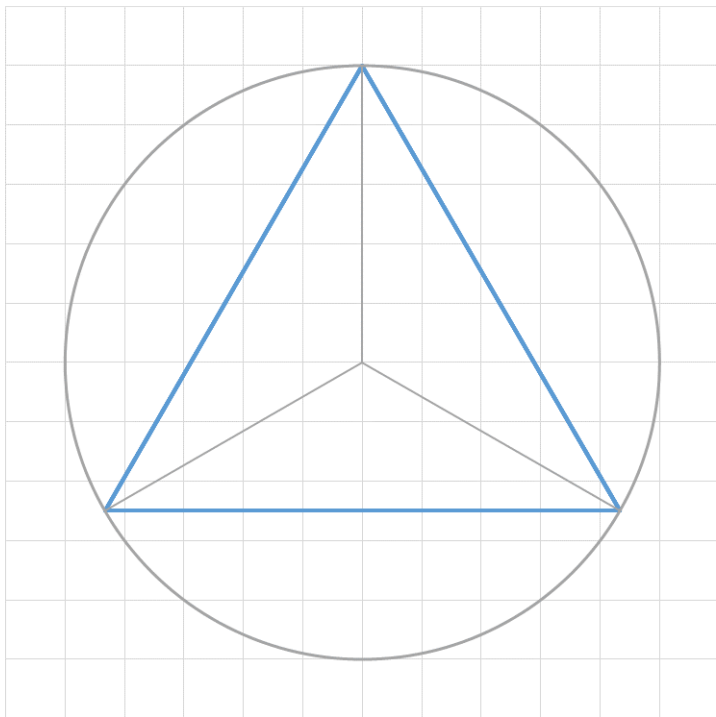
正☆角形

2024.11.10

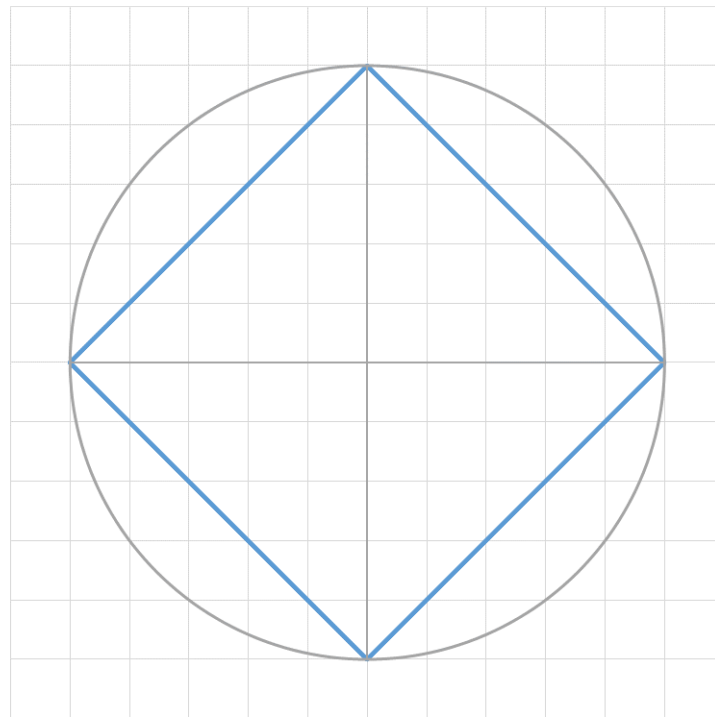
渡邊 俊夫

正 n 角形

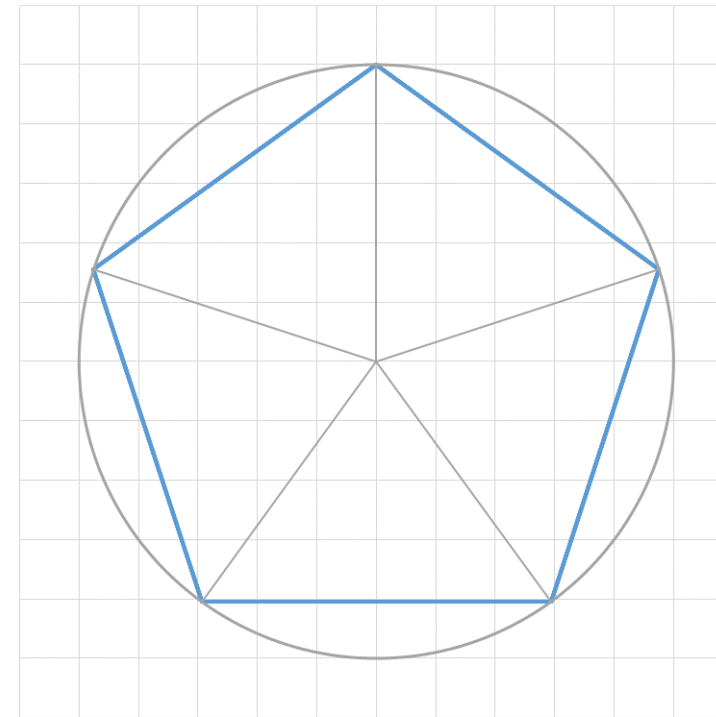
3 以上の整数 n に対して、円周を n 等分した点を順に結ぶと、 n 回目で 1 周して始点に戻り、正 n 角形になる。つまり、正 n 角形は、円周上で偏角を $2\pi/n$ ずつ増やした点を線分でつないだ図形である。



$n = 3$



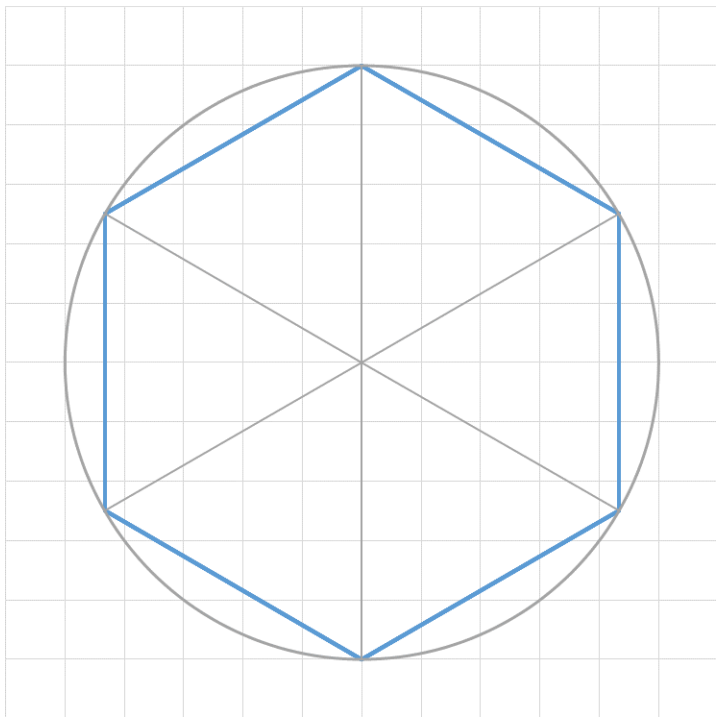
$n = 4$



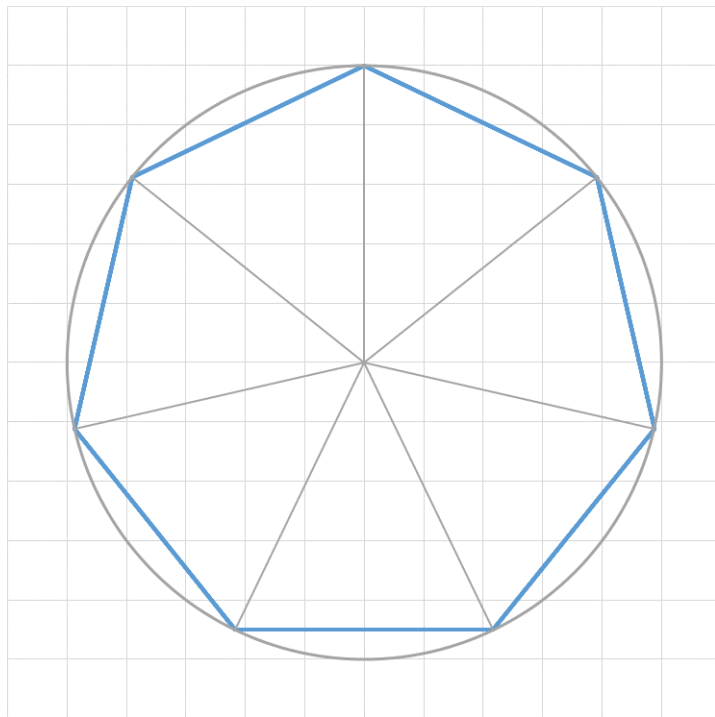
$n = 5$

正 n 角形

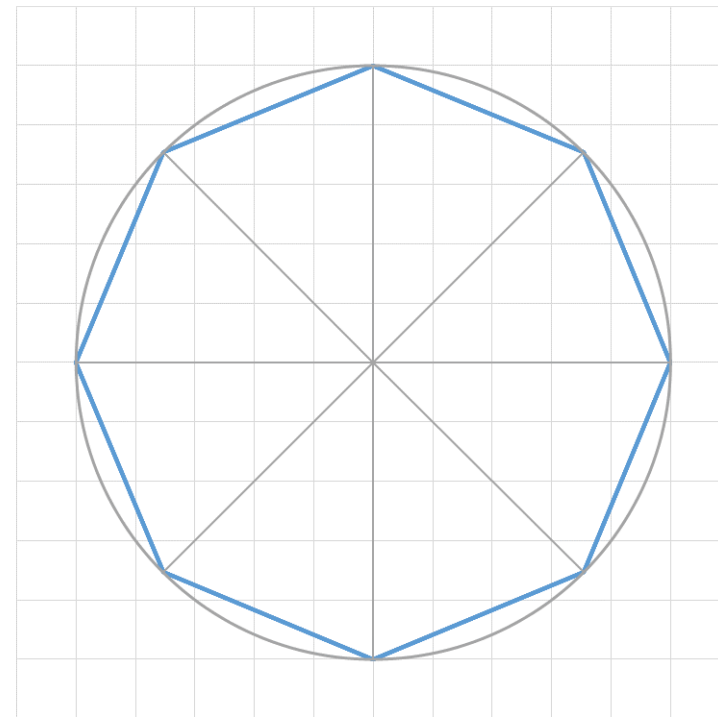
3 以上の整数 n に対して、円周を n 等分した点を順に結ぶと、 n 回目で 1 周して始点に戻り、正 n 角形になる。つまり、正 n 角形は、円周上で偏角を $2\pi/n$ ずつ増やした点を線分でつないだ図形である。



$n = 6$



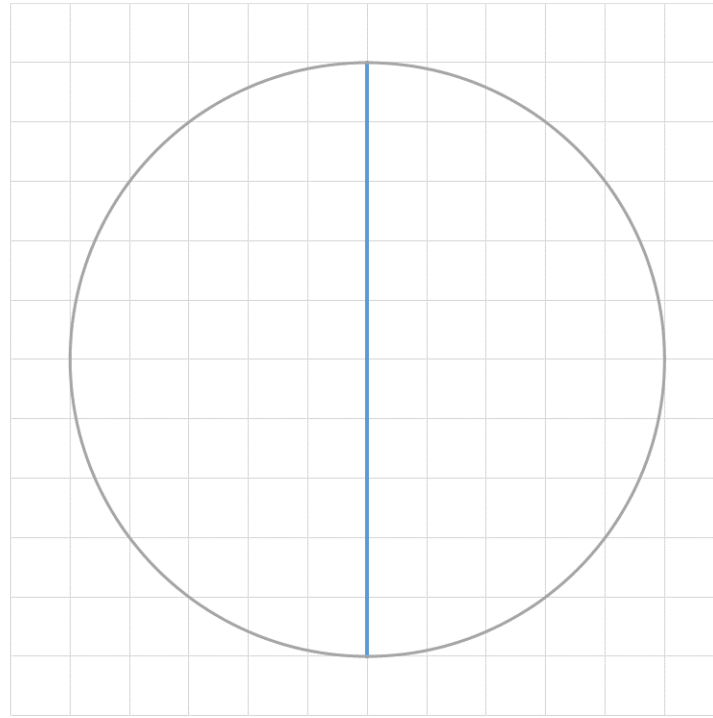
$n = 7$



$n = 8$

正 2 角形

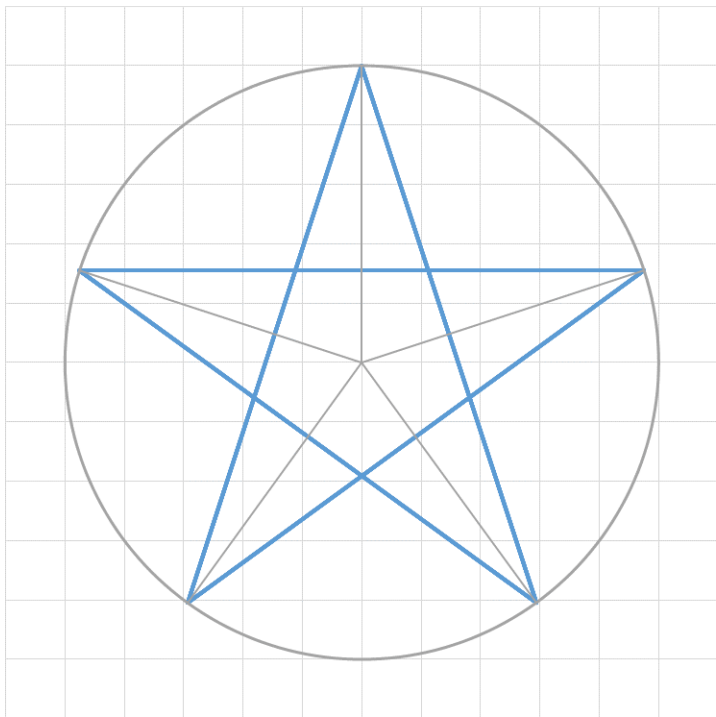
この定義によれば、正 2 角形は、円周を 2 等分した点を結んだ図形（円周上で偏角を π 増やした点を線分でつないだ図形）であり、円の直径になる。



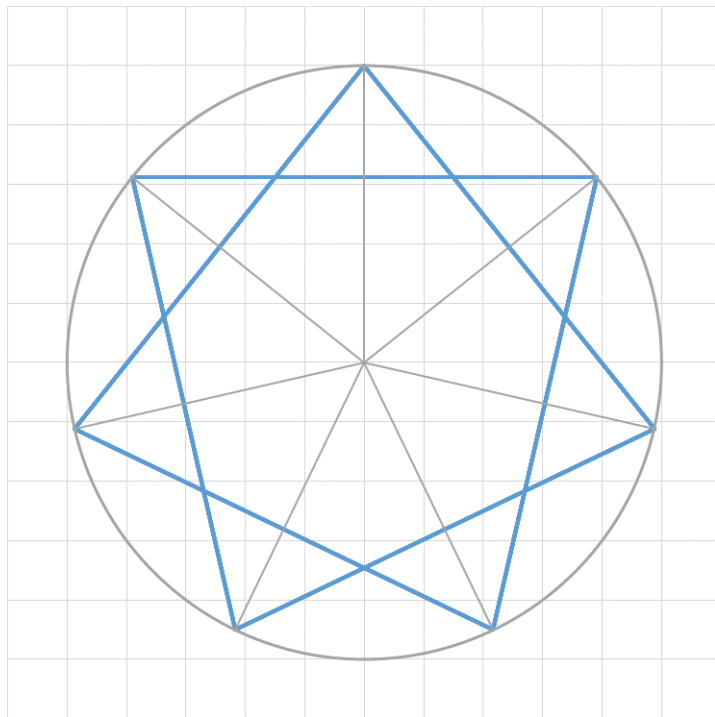
$$n = 2$$

正 n/m 角形

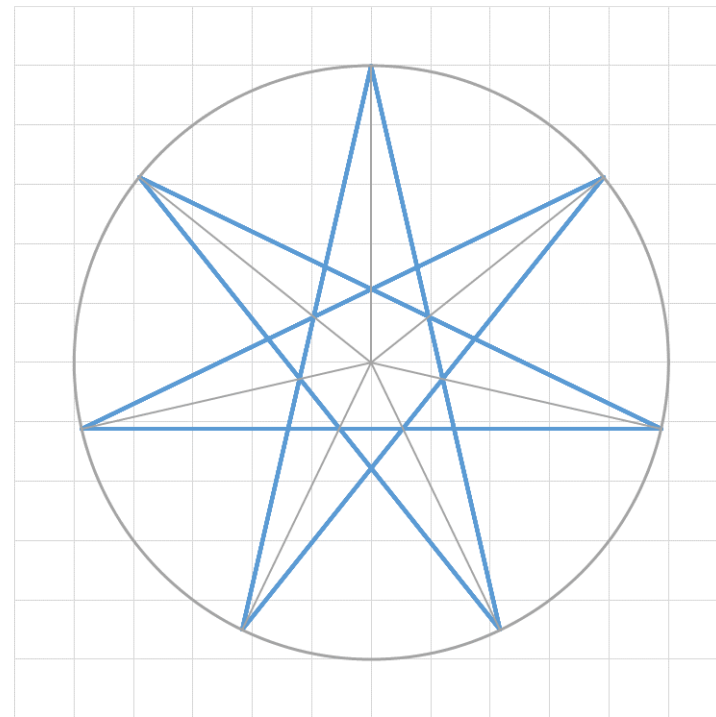
この定義を分数に拡張する。整数 n, m に対して、円周上で偏角を $2\pi m/n$ ずつ増やした点を線分でつないだ図形を正 n/m 角形とする。
(ただし、 $n \neq 0, \pm 1, m \neq 0$ とする。)



$n = 5, m = 2$



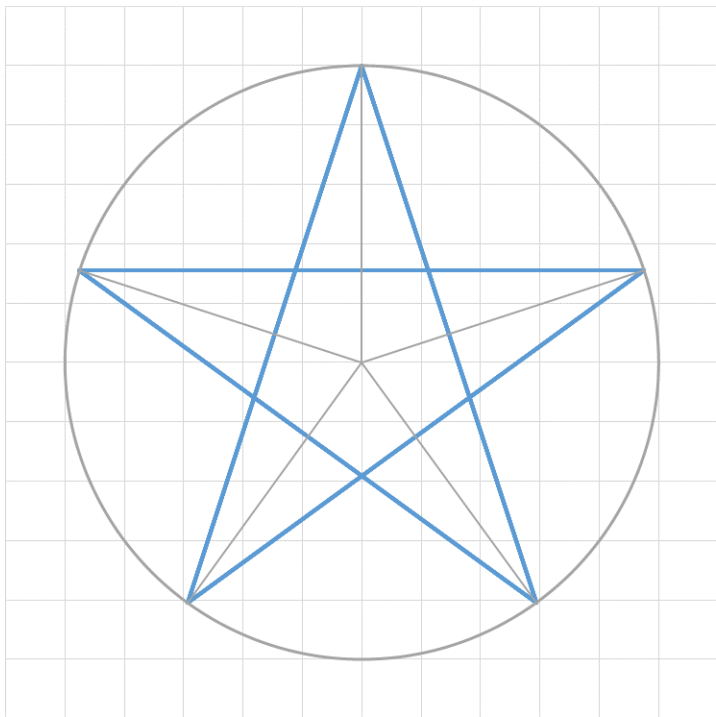
$n = 7, m = 2$



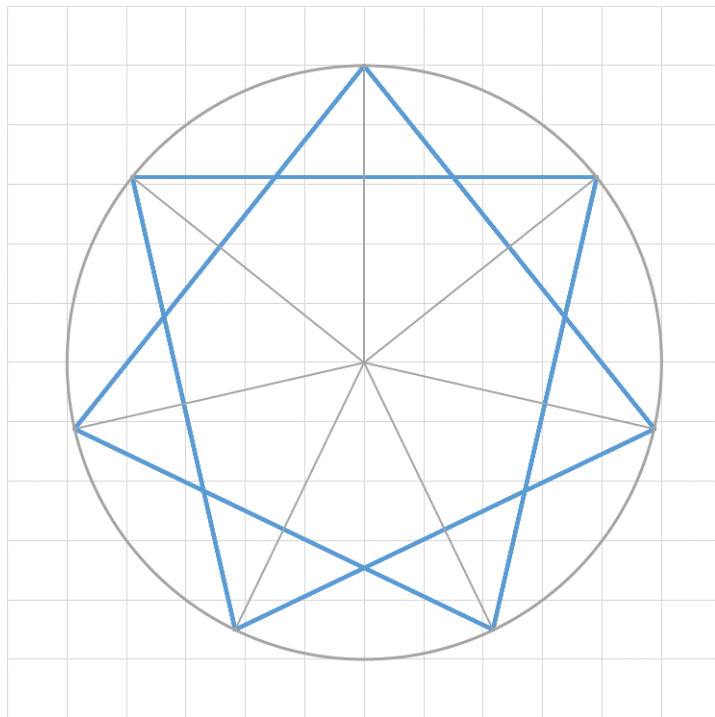
$n = 7, m = 3$

正 n/m 角形

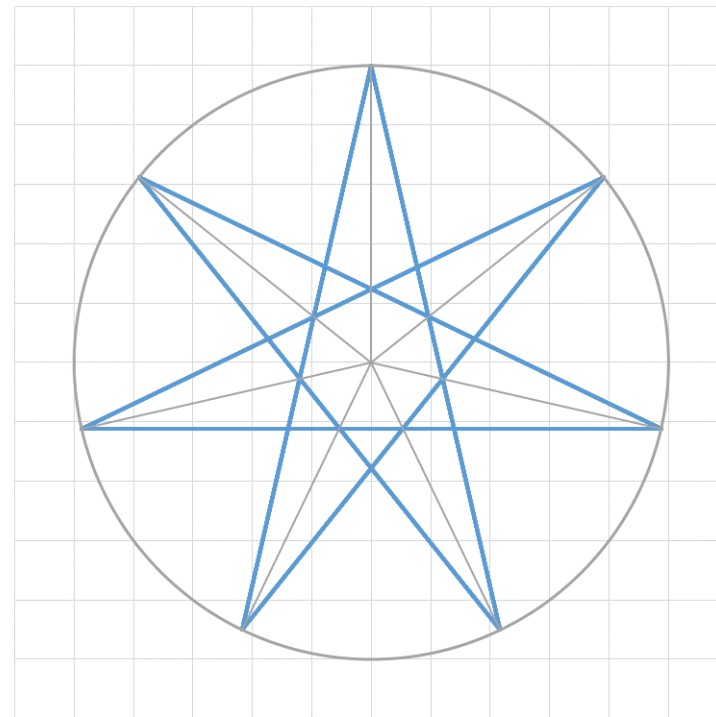
正 n/m 角形は、正 n 角形の頂点を $m - 1$ 個おきに結んだ図形になる。
円周上で偏角を $2\pi m/n$ ずつ増やした点を線分でつなぐと、 n, m が互いに素であるとき、 n 回目で m 周して始点に戻る。



$n = 5, m = 2$



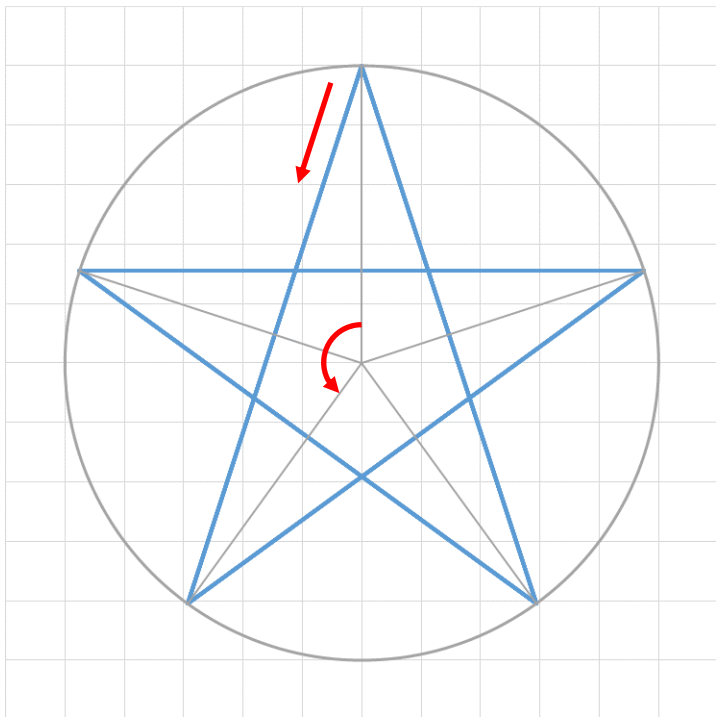
$n = 7, m = 2$



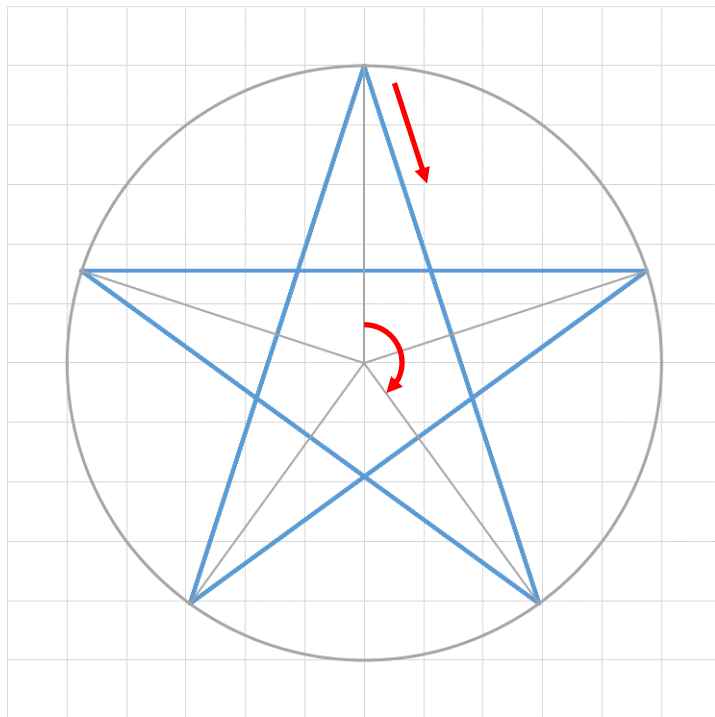
$n = 7, m = 3$

正 n/m 角形

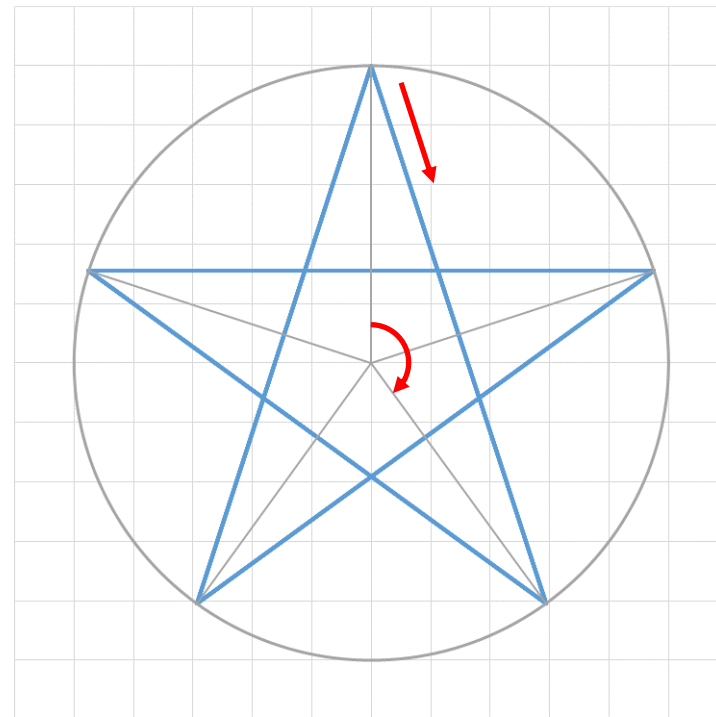
n/m が負のときは、偏角の差 $2\pi m/n$ が負になるから、正 n 角形の頂点を逆回りに $m - 1$ 個おきに結んだ図形になる。描く順序は異なるが、形は同じである。



$$n = 5, m = 2$$



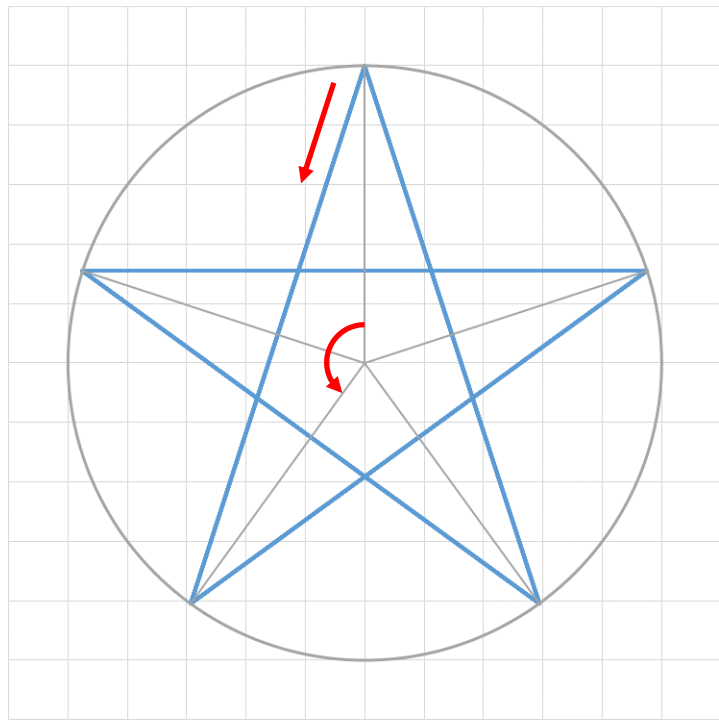
$$n = 5, m = -2$$



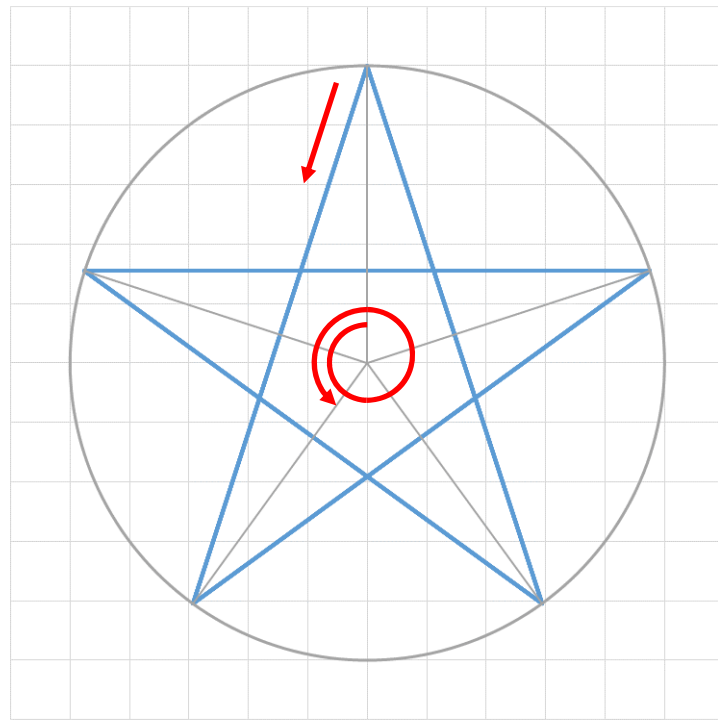
$$n = -5, m = 2$$

正 n/m 角形

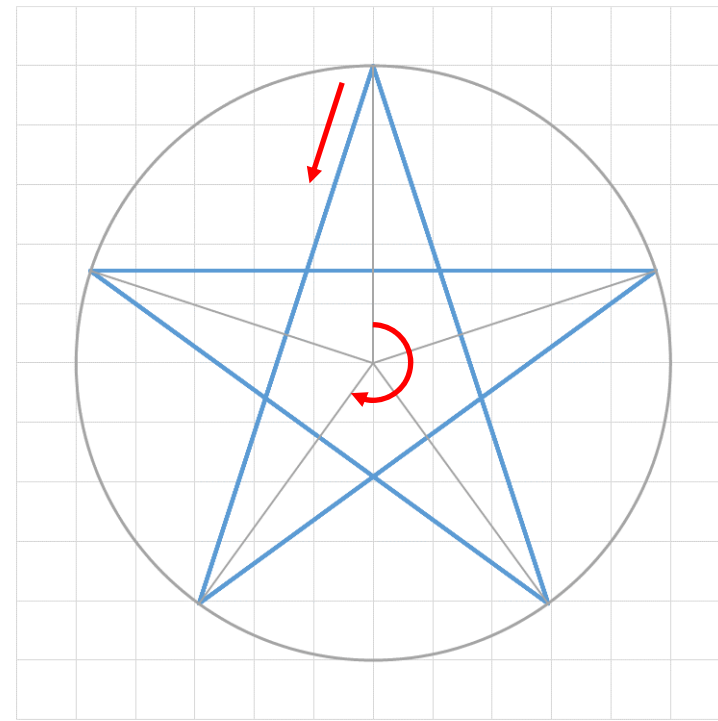
任意の整数 k に対して、正 $n/(m + kn)$ 角形の頂点間の偏角の差は $2\pi(m + kn)/n = (2\pi m/n) + 2\pi k = 2\pi m/n$ だから、正 $n/(m + kn)$ 角形と正 n/m 角形は(描く順序も含めて)同じである。



$$n = 5, m = 2$$



$$n = 5, m = 7$$



$$n = 5, m = -3$$

正 n/m 角形

正 $n/(m + kn)$ 角形と正 n/m 角形は(描く順序も含めて)同じだから、正 n/m 角形は $1 < n/m \leq n$ の分数で一意に表すことができる。

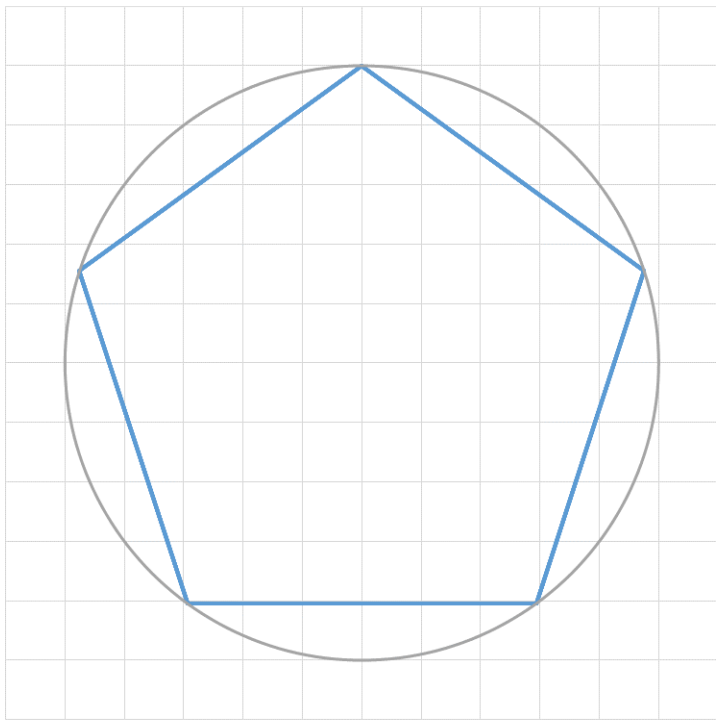
さらに、正 $n/(n - m)$ 角形と正 $n/(-m)$ 角形は(描く順序も含めて)同じで、正 $n/(-m)$ 角形と正 n/m 角形は描く順序が異なるだけで形は同じだから、正 $n/(n - m)$ 角形と正 n/m 角形は描く順序が異なるだけで形は同じである。

また、正 $3/2$ 角形は、正 $3/1$ 角形、すなわち正 3 角形と同じである。
正 $4/2$ 角形は、正 2 角形、すなわち円の直径と同じであり、正 $4/3$ 角形は、正 $4/1$ 角形、すなわち正 4 角形(正方形)と同じである。

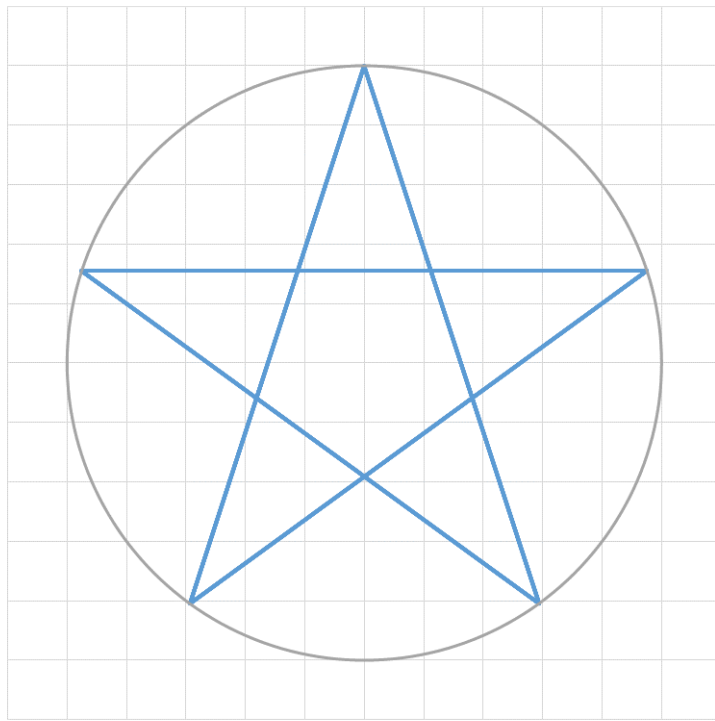
したがって、正 n/m 角形は、描く順序を除けば、 $2 \leq n/m \leq n$ の分数で表すことができる。

正 $5/m$ 角形

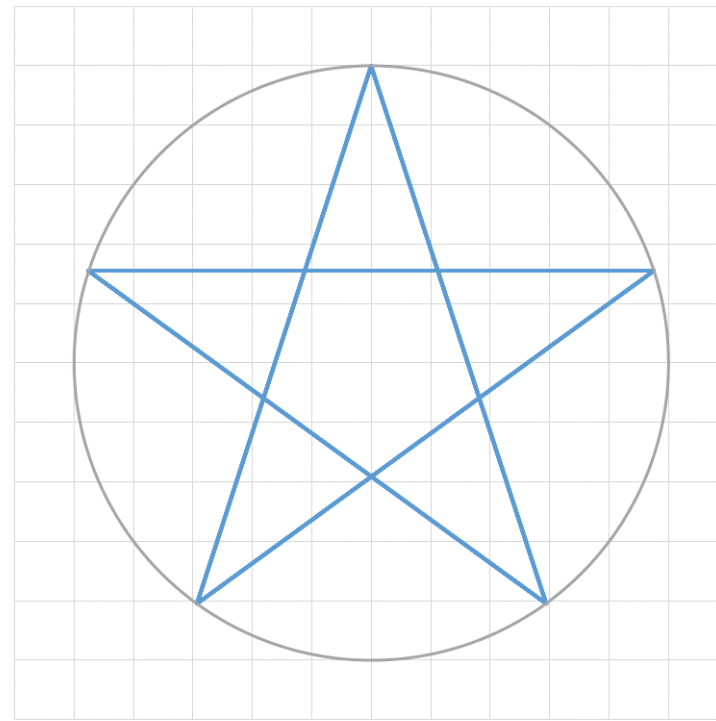
正 $5/m$ 角形は、正 5 角形の頂点を $m - 1$ 個おきに結んだ図形である。
正 $5/2$ 角形と正 $5/3$ 角形は、描く順序は異なるが、形は同じである
(星型正 5 角形または五芒星とよばれる図形になる)。



$n = 5, m = 1$



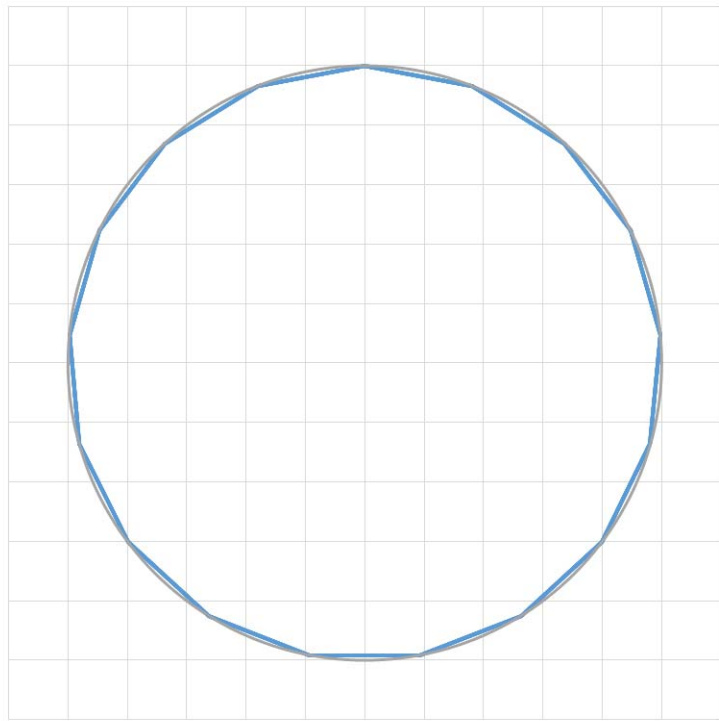
$n = 5, m = 2$



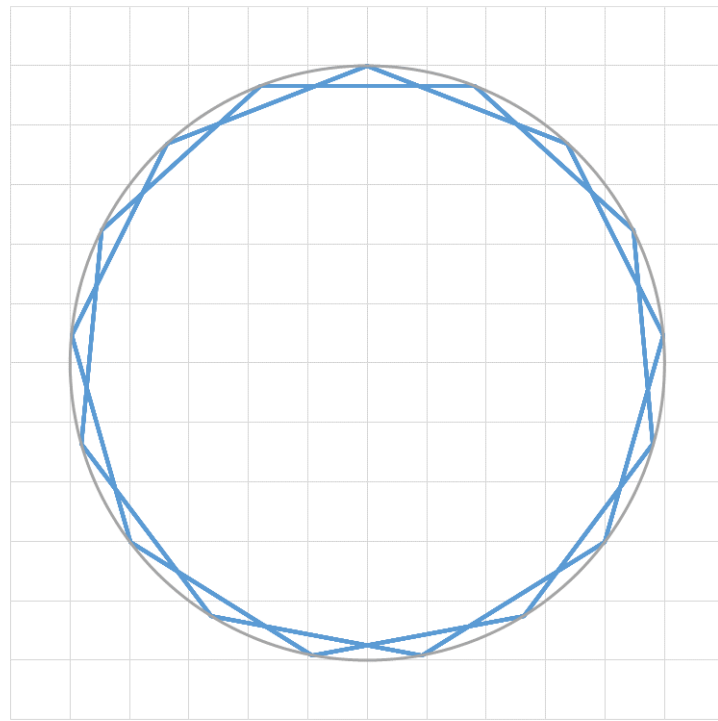
$n = 5, m = 3$

正 $17/m$ 角形

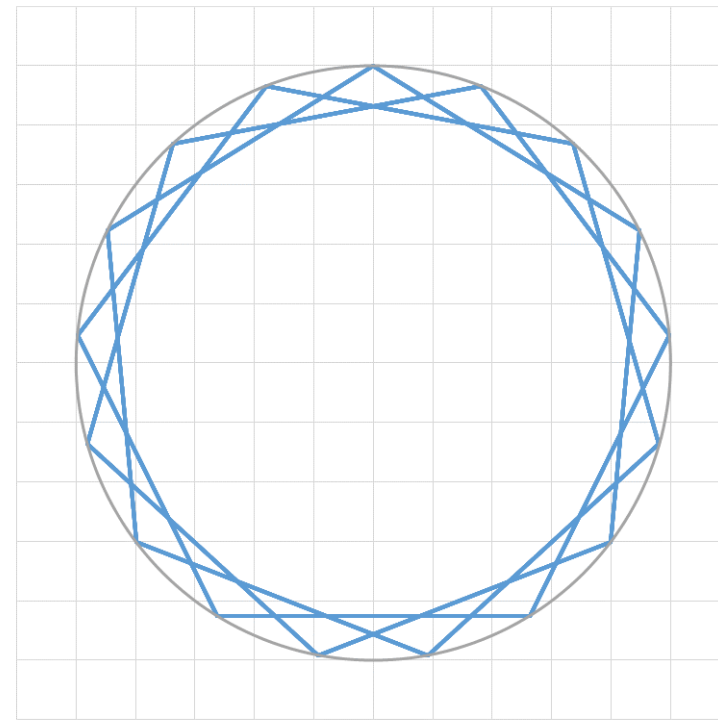
正 $17/m$ 角形は、正 17 角形の頂点を $m - 1$ 個おきに結んだ図形である。



$n = 17, m = 1$



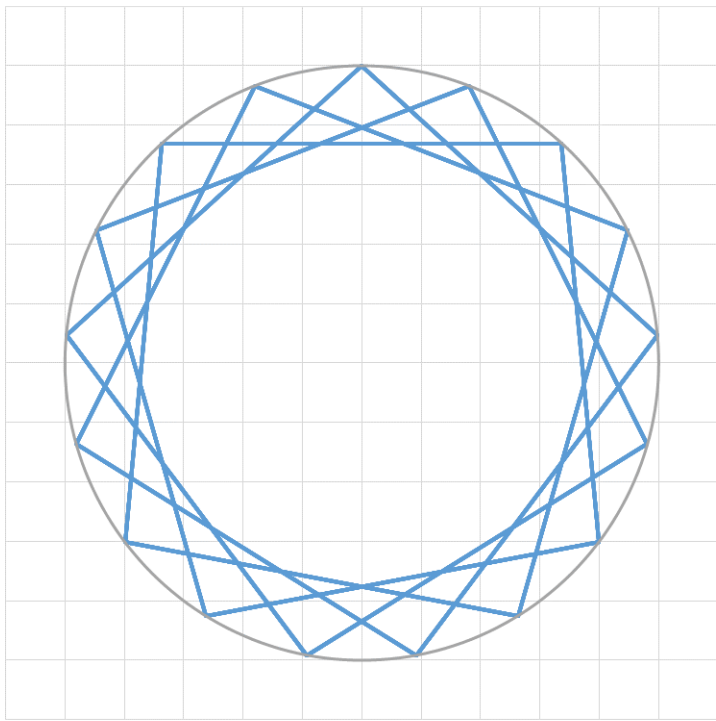
$n = 17, m = 2$



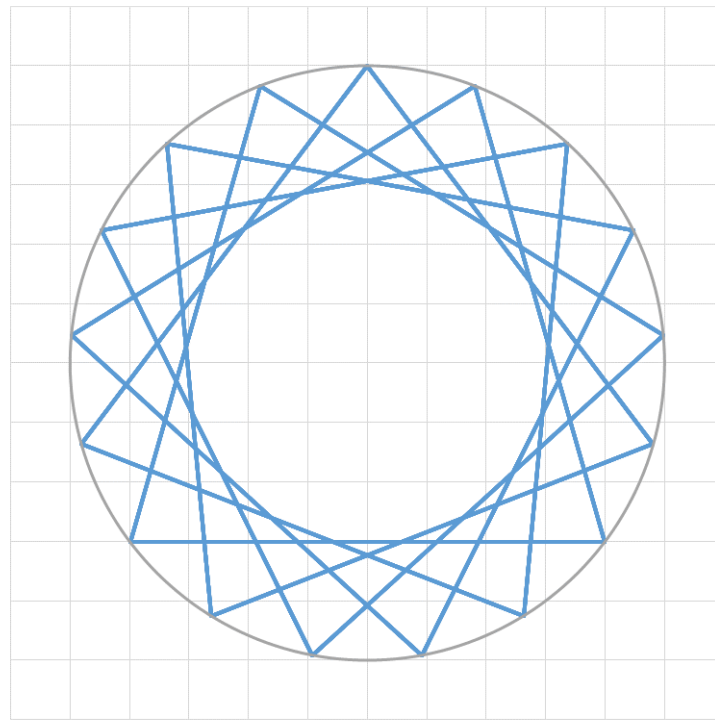
$n = 17, m = 3$

正 $17/m$ 角形

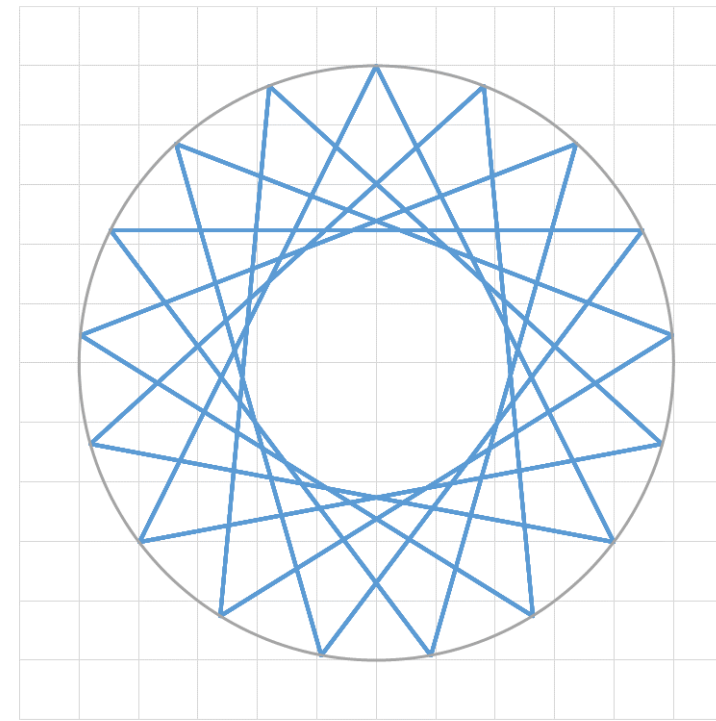
正 $17/m$ 角形は、正 17 角形の頂点を $m - 1$ 個おきに結んだ図形である。



$n = 17, m = 4$



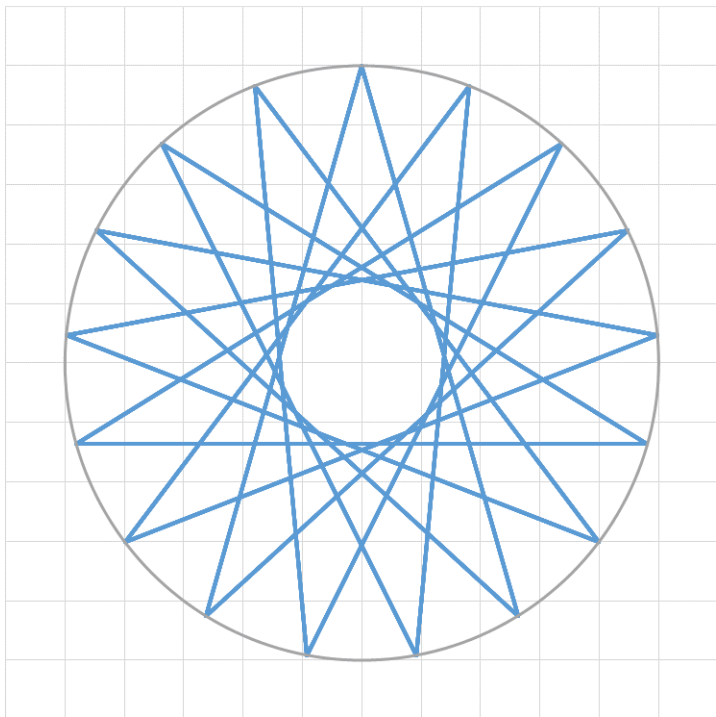
$n = 17, m = 5$



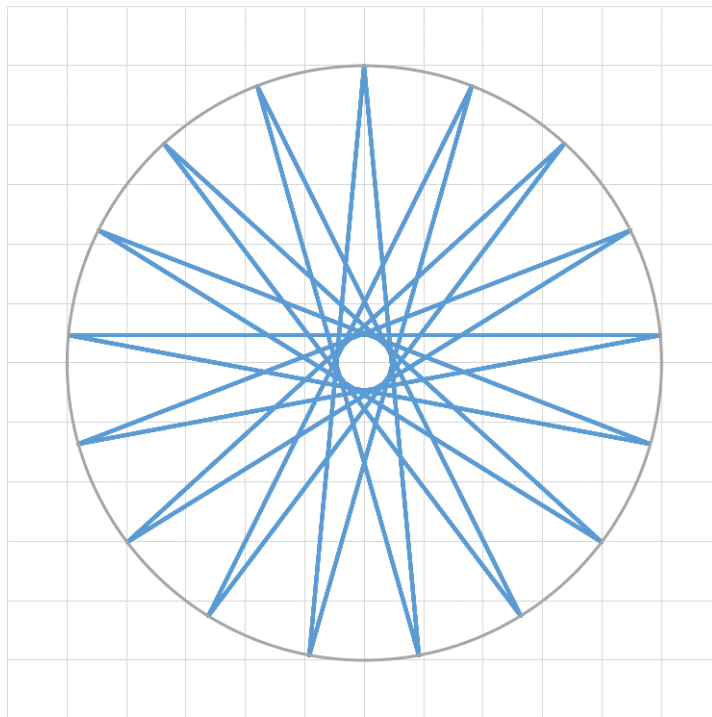
$n = 17, m = 6$

正 $17/m$ 角形

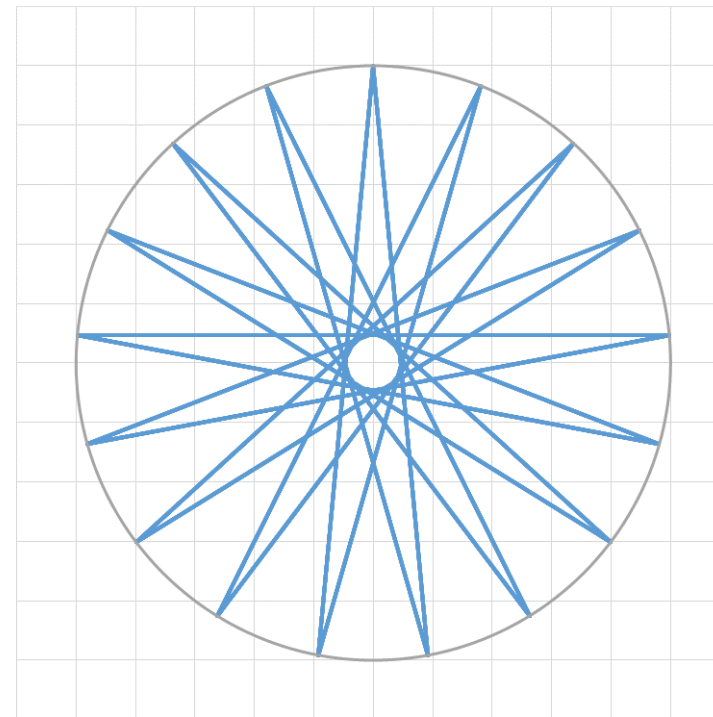
正 $17/m$ 角形は、正 17 角形の頂点を $m - 1$ 個おきに結んだ図形である(正 $17/8$ 角形と正 $17/9$ 角形は、描く順序は異なるが、形は同じになる)。



$n = 17, m = 7$



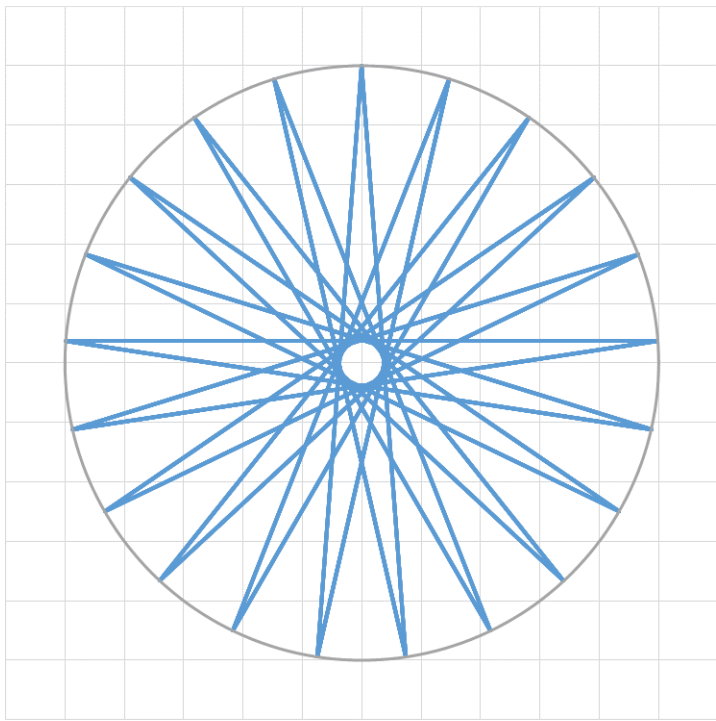
$n = 17, m = 8$



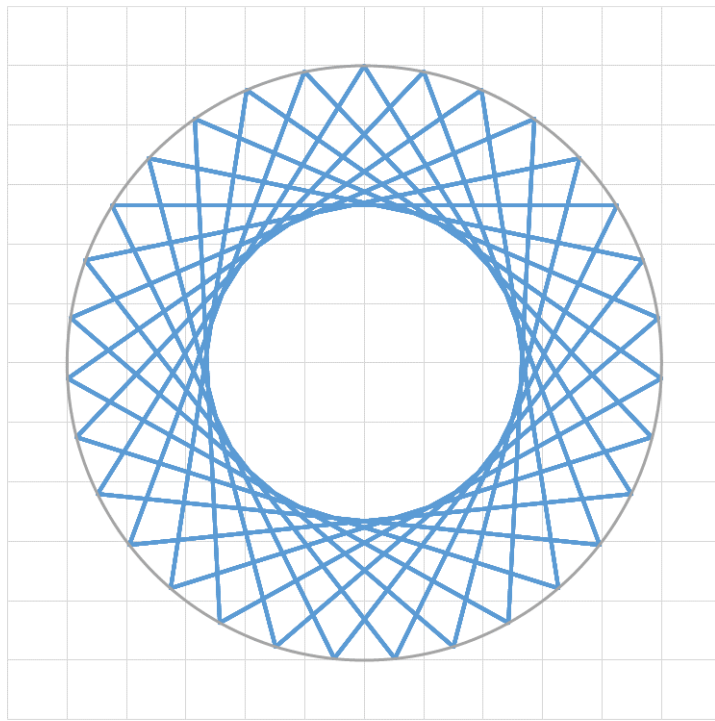
$n = 17, m = 9$

正 p 角形

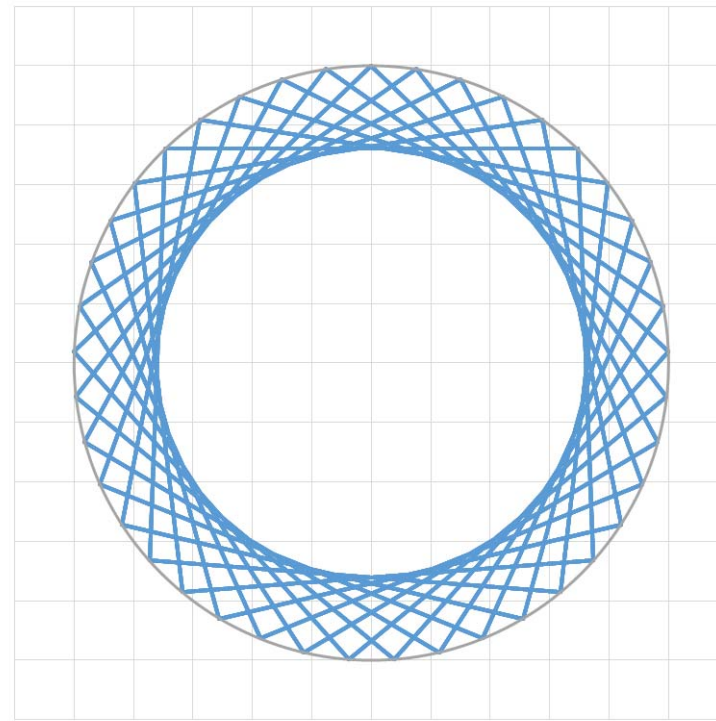
さらに、この定義を実数に拡張する。実数 p に対して、円周上で偏角を $2\pi/p$ ずつ増やした点を線分でつないだ図形を正 p 角形とする。 p が有理数のときは、つないだ線分は有限回で始点に戻る。



$p = 2.1$



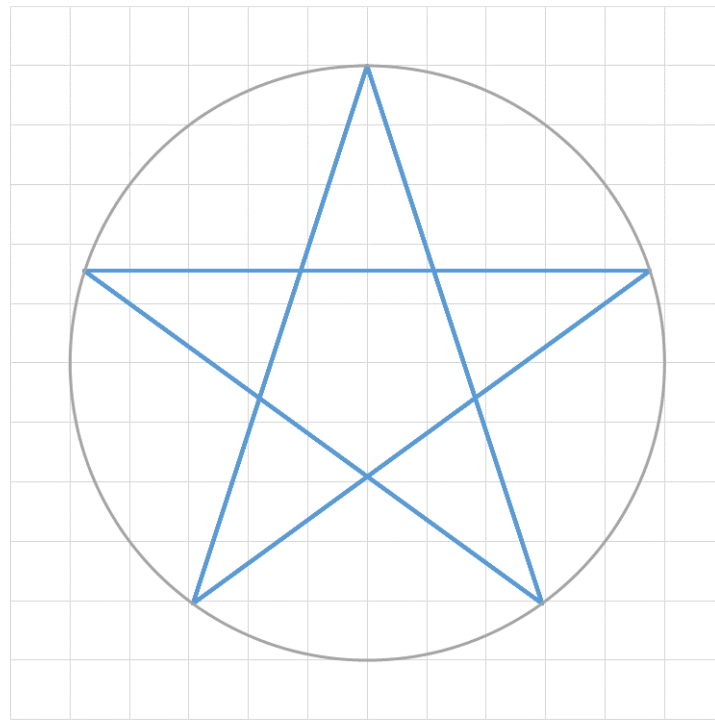
$p = 3.1$



$p = 4.1$

正 2.5 角形

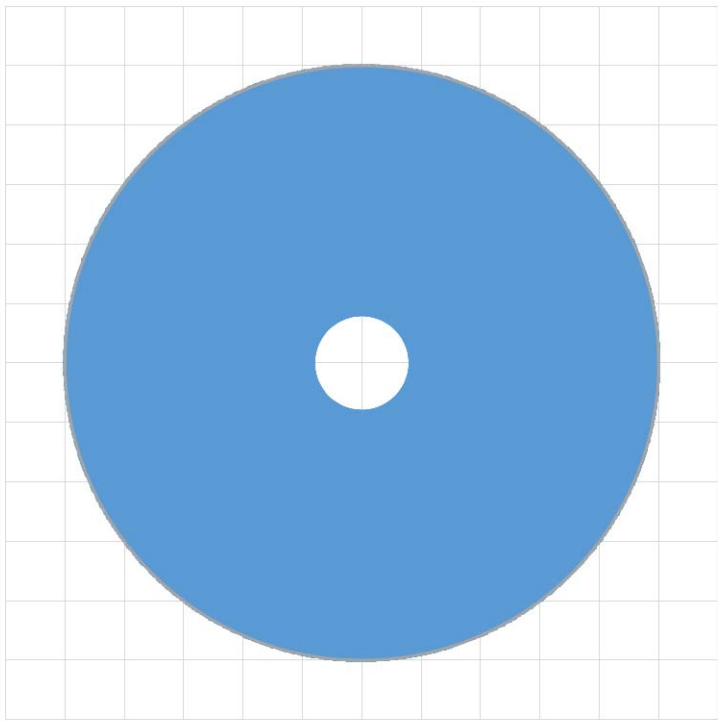
$5/2 = 2.5$ だから、正 2.5 角形は正 $5/2$ 角形と同じで、正 5 角形の頂点を 1 個おきに結んだ図形(星型正 5 角形または五芒星)である。



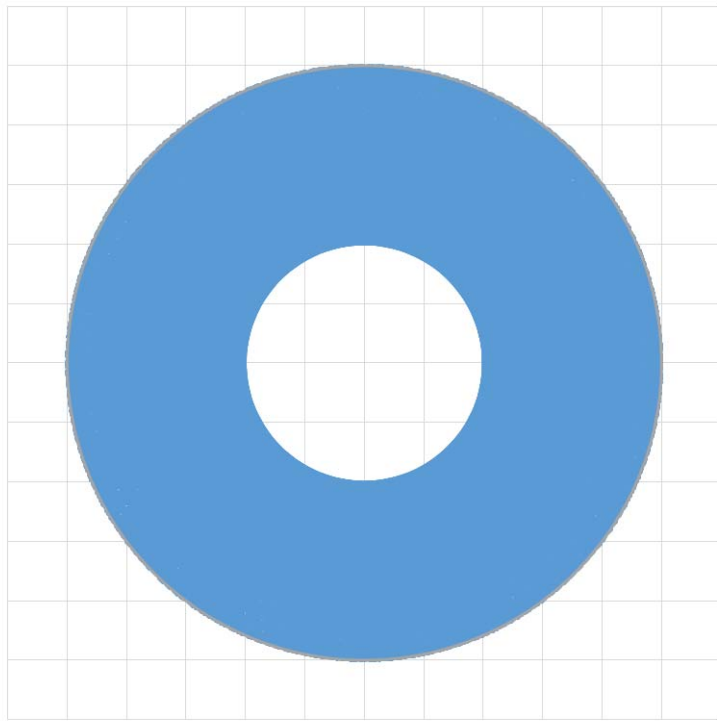
$$p = 2.5$$

正 p 角形

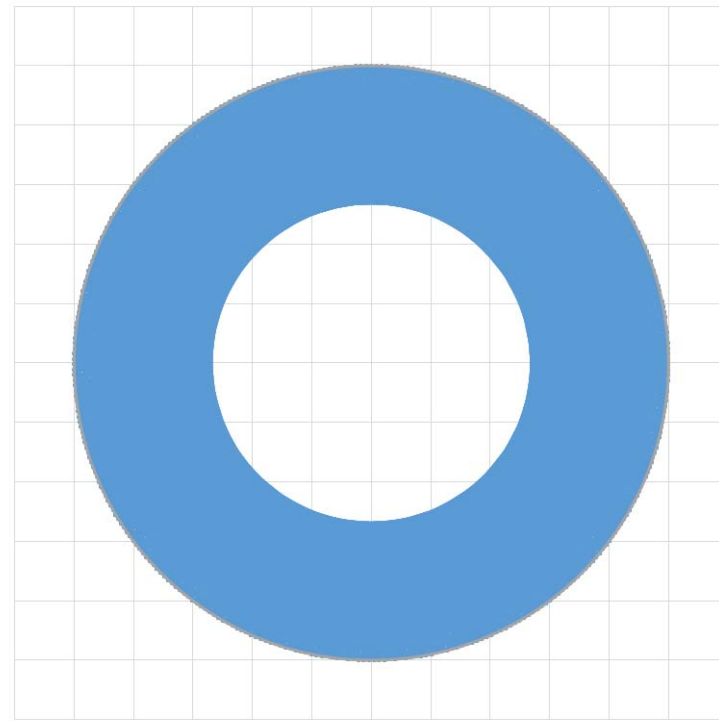
p が無理数のときは、つないだ線分は始点に戻らず、円周を外周とする円環を埋め尽くす。円環の外径を 1 とすると、内径は $|\cos(\pi/p)|$ である。



$$p = \sqrt{5}$$



$$p = e$$



$$p = \pi$$

正 p 角形

$0 < p < 1$ のとき、 $1/p$ の整数部を k とすると、 $2\pi((1/p) - k) = 2\pi/p$ だから、正 $1/((1/p) - k)$ 角形と正 p 角形は(描く順序も含めて)同じで、かつ $1/((1/p) - k) > 1$ である。

$1 < p < 2$ のとき、 $2\pi((p - 1)/p) = 2\pi(1 - (1/p)) = -2\pi/p$ だから、正 $p/(p - 1)$ 角形と正 p 角形は描く順序が異なるだけで形は同じで、かつ $p/(p - 1) > 2$ である。

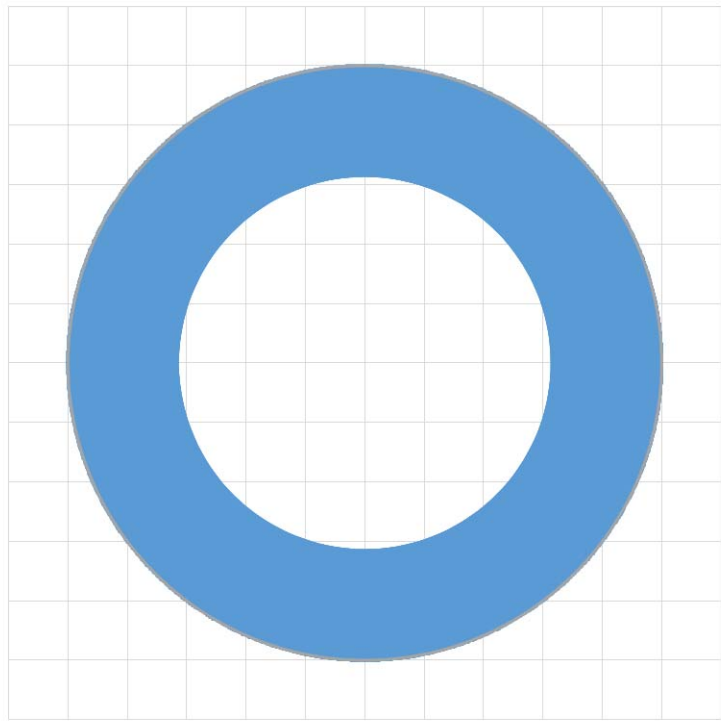
さらに、正 $(-p)$ 角形と正 p 角形は、描く順序が異なるだけで形は同じである。

したがって、正 p 角形は、描く順序を除けば、 $p \geq 2$ の実数で表すことができる。

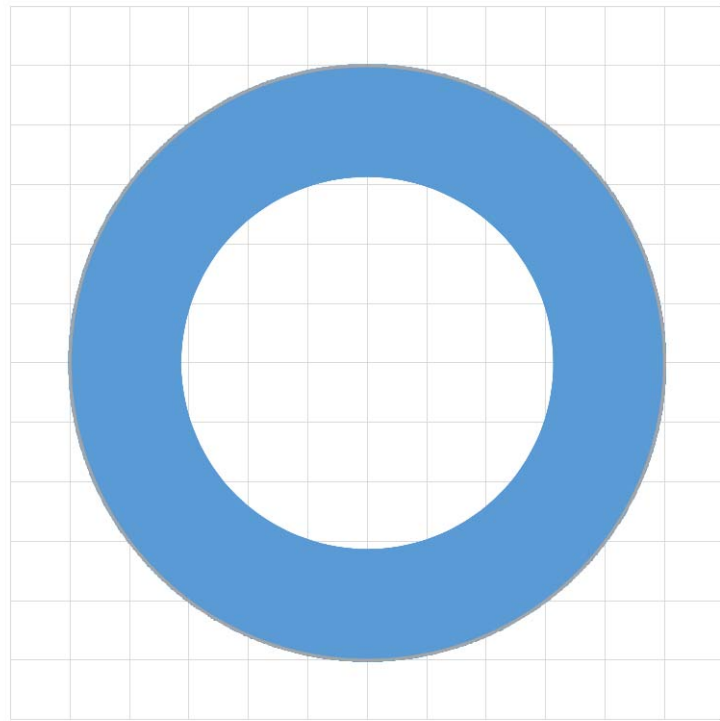
正 p 角形

正 p 角形は、描く順序を除けば、 $p \geq 2$ の実数で表すことができる。

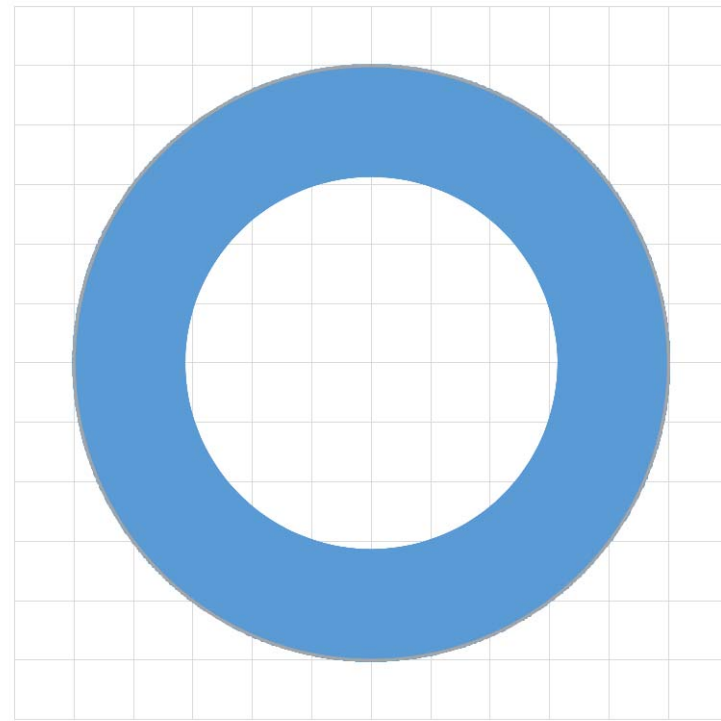
例えば、正 $1/e$ 角形は、正 $1/(e - 2)$ 角形と(描く順序を含めて)同じで、正 $1/(3 - e)$ 角形と描く順序は異なるが形は同じである。



$$p = 1/e \approx 0.368$$



$$p = 1/(e - 2) \approx 1.392$$



$$p = 1/(3 - e) \approx 3.550$$