4次方程式の判別式

渡邉 俊夫

4次方程式の判別式

実数を係数とする4次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

の判別式は、方程式の4つの解を $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ として

$$D = a^6(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\alpha)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\alpha)^2$$

で定義される。これを方程式の係数で表すと

$$\begin{aligned} D = 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\ - 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\ - 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\ + 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2 \end{aligned}$$

となる。本稿では、この16項からなる複雑な式が表しているものを紐いてみる。

4次方程式の判別式

2次方程式の判別式

$$D = a^2(\alpha - \beta)^2$$

は方程式の2つの解 $x = \alpha, \beta$ の差積の2乗であり、3次方程式の判別式

$$D = a^4(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

は方程式の3つの解 $x = \alpha, \beta, \gamma$ の3個の差積の2乗の積であるが、4次方程式の判別式

$$D = a^6(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \alpha)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \alpha)^2$$

は方程式の4つの解 $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ の6個の差積の2乗の積であるから、判別式の符号だけからは、実数解の個数はわからない。
（$D = 0$ ならば重解をもつことはわかる）

特殊な場合

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$D=256a^3e^3-128a^2c^2e^2-192a^2bde^2$$
$$-80abc^2de-6ab^2d^2e+16ac^4e+b^2c^2d^2-4b^3d^3$$
$$-4ac^3d^2-4b^2c^3e-27a^2d^4-27b^4e^2$$
$$+18abcd^3+18b^3cde+144a^2cd^2e+144ab^2ce^2$$

は、$b=0$ のとき

$$D=256a^3e^3-128a^2c^2e^2+16ac^4e-4ac^3d^2-27a^2d^4+144a^2cd^2e$$
$$=16ae(c^2-4ae)^2+d^2(-4ac^3-27a^2d^2)+16aed^2\cdot 9ac$$

と少し簡単になる。

特殊な場合

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = {} & 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
& - 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
& - 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
& + 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は、$e=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
D &= b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 - 4ac^3d^2 - 27a^2d^4 + 18abcd^3 \\
&= d^2(b^2c^2 - 4b^3d - 4ac^3 - 27a^2d^2 + 18abcd)
\end{aligned}
$$

となる。右辺の括弧内は、3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の判別式である。

特殊な場合

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = {} & 256a^3e^3-128a^2c^2e^2-192a^2bde^2 \\
& -80abc^2de-6ab^2d^2e+16ac^4e+b^2c^2d^2-4b^3d^3 \\
& -4ac^3d^2-4b^2c^3e-27a^2d^4-27b^4e^2 \\
& +18abcd^3+18b^3cde+144a^2cd^2e+144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は、$b=e=0$ のとき

$$D=-4ac^3d^2-27a^2d^4=d^2(-4ac^3-27a^2d^2)$$

となる。右辺に現れる $-4ac^3-27a^2d^2$ は、3次方程式 $ax^3+cx+d=0$ の判別式である。

特殊な場合

4次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = {} & 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
& - 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
& - 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
& + 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は、$a = 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
D &= b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e - 27b^4e^2 + 18b^3cde \\
&= b^2(c^2d^2 - 4bd^3 - 4c^3e - 27b^2e^2 + 18bcde)
\end{aligned}
$$

となる。右辺の括弧内は、3次方程式 $bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ の判別式である。

特殊な場合

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
- 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
- 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
+ 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は、$a=c=0$ とすると

$$D = -4b^3d^3 - 27b^4e^2 = b^2(-4bd^3 - 27b^2e^2)$$

となる。右辺に現れる $-4bd^3-27b^2e^2$ は、3次方程式 $bx^3+dx+e=0$ の判別式である。

特殊な場合

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = {} & 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
& - 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
& - 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
& + 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は、$a=e=0$ とすると

$$D = b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 = b^2d^2(c^2-4bd)$$

となる。右辺に現れる c^2-4bd は、2次方程式 $bx^2+cx+d=0$ の判別式である。

特殊な場合

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = {} & 256a^3e^3-128a^2c^2e^2-192a^2bde^2 \\
& -80abc^2de-6ab^2d^2e+16ac^4e+b^2c^2d^2-4b^3d^3 \\
& -4ac^3d^2-4b^2c^3e-27a^2d^4-27b^4e^2 \\
& +18abcd^3+18b^3cde+144a^2cd^2e+144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は、$b=d=0$ のとき

$$D=256a^3e^3-128a^2c^2e^2+16ac^4e=16ae(c^2-4ae)^2$$

となる。右辺に現れる c^2-4ae は、2次方程式 $ax^2+cx+e=0$ の判別式である。

判別式の項の分類(仮)

以上より、4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の判別式

$$
\begin{aligned}
D = 256a^3e^3 &- 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
&- 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
&- 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
&+ 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

の16個の項は、2次方程式の判別式に由来する3個の項(赤字)と、3次方程式の判別式に由来する8個の項(青字)を含んでいて、残りの

$$-192a^2bde^2-80abc^2de-6ab^2d^2e+144a^2cd^2e+144ab^2ce^2$$

の5個が4次方程式に特徴的な項だと言えそうである。

判別式の性質

4次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

は $e \neq 0$ のとき $x \neq 0$ だから、両辺を x^4 で割って

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^4} = 0$$

$t = 1/x^4$ とおくと

$$et^4 + dt^3 + ct^2 + bt + a = 0$$

となる。この方程式の判別式は、元の方程式の判別式と符号が一致するはずである。これが任意の a, b, c, d, e に対して成り立つためには、$a \leftrightarrow e$、$b \leftrightarrow d$ を同時に入れ替えても判別式の形は変わらないことが必要である。

判別式の性質

実際、4次方程式の判別式

$$
\begin{aligned}
D = 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
- 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
- 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
+ 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

は a と e の次数、b と d の次数が等しい項（1-2行目）と、a と e の次数、b と d の次数が入れ替わっていて係数が等しい項のペア（3-4行目）からなっていて、$a \leftrightarrow e$、$b \leftrightarrow d$ を同時に入れ替えても判別式の形は変わらないという性質をもっている。

解と係数の関係

4次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ の4つの解を
$x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると、方程式は

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = 0$$

の形で表せるはずである。左辺を展開すると

$$\begin{aligned}
&a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \\
&= a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)(x^2 - (\gamma+\delta)x + \gamma\delta) \\
&= a\Big(x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\beta\delta+\gamma\alpha)x^2 \\
&\qquad\qquad - (\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta) + \alpha\beta\gamma\delta\Big)
\end{aligned}$$

となる。

解と係数の関係

各項の係数を比較して、解と係数の関係を得る。

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\beta\delta+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta=-\frac{d}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}$$

判別式の性質

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ についての次数を考えると

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\alpha)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\alpha)^2$$

は12次の項のみで表されるはずである。いっぽう、対称式

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\beta\delta+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta=-\frac{d}{a}, \quad \alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}$$

はそれぞれ1次、2次、3次、4次だから、判別式 D を展開したときに含まれる項は次数から限定される。

判別式の性質

4次方程式の判別式 D を展開したときに含まれる可能性がある項は、次数による限定および $a \leftrightarrow e$、$b \leftrightarrow d$ を同時に入れ替えても判別式の形は変わらないという性質を考えて

$$a^3e^3,$$
$$a^2bde^2, a^2c^2e^2, ab^2ce^2, b^4e^2,$$
$$a^2cd^2e, ab^2d^2e, abc^2de, b^3cde, ac^4e, b^2c^3e,$$
$$a^2d^4, abcd^3, b^3d^3, ac^3d^2, b^2c^2d^2, bc^4d, c^6$$

の18通りに限られる。実際の判別式は、上記のうち bc^4d と c^6 を除く16項からなっている。

まとめ

4次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ の判別式は

$$
\begin{aligned}
D = 256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 \\
- 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 \\
- 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2 \\
+ 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2
\end{aligned}
$$

と表される。

この判別式は $a \leftrightarrow e$、$b \leftrightarrow d$ を同時に入れ替えても形が変わらない。

その性質と次数の関係から、含まれる可能性がある18通りの項のうち bc^4d と c^6 を除く16項からなっている。

16項のうち、3項（赤字）は2次方程式の判別式に、8項（青字）は3次方程式の判別式に由来すると言えそうである。

付録:判別式の計算(概略)

4次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

の4つの解を $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ として

$$D = a^6(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \alpha)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \alpha)^2$$

を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の基本対称式

$$e_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$e_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha + \beta\delta + \gamma\alpha$$

$$e_3 = \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta$$

$$e_4 = \alpha\beta\gamma\delta$$

で表す。

付録：判別式の計算（概略）

計算の詳細は別資料を参照

まず、

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)=-e_3+2e_2\alpha-3e_1\alpha^2+4\alpha^3$$
$$(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)=-e_3+2e_2\beta-3e_1\beta^2+4\beta^3$$
$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)=-e_3+2e_2\gamma-3e_1\gamma^2+4\gamma^3$$
$$(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)=-e_3+2e_2\delta-3e_1\delta^2+4\delta^3$$

である。ここで、$b=0$ の場合を考えると $e_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ より

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)=-e_3+2e_2\alpha+4\alpha^3$$
$$(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)=-e_3+2e_2\beta+4\beta^3$$
$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)=-e_3+2e_2\gamma+4\gamma^3$$
$$(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)=-e_3+2e_2\delta+4\delta^3$$

付録:判別式の計算(概略)

計算の詳細は別資料を参照

したがって、

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\alpha)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\alpha)^2\\
&=(-e_3+2e_2\alpha+4\alpha^3)(-e_3+2e_2\beta+4\beta^3)\\
&\qquad\cdot(-e_3+2e_2\gamma+4\gamma^3)(-e_3+2e_2\delta+4\delta^3)\\
&=e_3{}^4-4e_3{}^3f_1+4e_2{}^3e_3{}^2+8e_2e_3{}^2f_2+16e_3{}^2f_3-8e_2{}^3e_3{}^2\\
&\qquad-16e_2{}^2e_3f_4-32e_2e_3f_5-64e_3f_6+16e_2{}^4e_4\\
&\qquad+32e_2{}^3e_4f_7+64e_2{}^2e_4f_8+128e_2e_4f_9+256e_4{}^3
\end{aligned}
$$

ここで、$f_1 \sim f_9$ は次に示すような $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ の対称式であり、基本対称式 e_1,e_2,e_3,e_4 を用いて表せる。

付録：判別式の計算（概略）

計算の詳細は別資料を参照

$e_1 = 0$ のとき

$$f_1 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = {e_1}^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 3e_3$$

$$f_2 = \alpha^3(\beta + \gamma + \delta) + \beta^3(\alpha + \gamma + \delta) + \gamma^3(\alpha + \beta + \delta) + \delta^3(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$= {e_1}^2e_2 - 2{e_2}^2 - e_1e_3 + 4e_4 = -2{e_2}^2 + 4e_4$$

$$f_3 = \alpha^3\beta^3 + \beta^3\gamma^3 + \gamma^3\delta^3 + \delta^3\alpha^3 + \alpha^3\gamma^3 + \delta^3\beta^3$$
$$= {e_2}^3 - 3e_1e_2e_3 - 3e_2e_4 + 3{e_1}^2e_4 + 3{e_3}^2 = {e_2}^3 - 3e_2e_4 + 3{e_3}^2$$

$$f_4 = \alpha^3(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) + \beta^3(\gamma\delta + \delta\alpha + \alpha\gamma)$$
$$+ \gamma^3(\alpha\beta + \delta\alpha + \delta\beta) + \delta^3(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$$
$$= {e_1}^2e_3 - 2e_2e_3 - e_1e_4 = -2e_2e_3$$

付録：判別式の計算（概略）

計算の詳細は別資料を参照

$$f_5 = \alpha^3\beta^3(\gamma+\delta) + \beta^3\gamma^3(\delta+\alpha) + \gamma^3\delta^3(\alpha+\beta) + \delta^3\alpha^3(\beta+\gamma)$$
$$+ \alpha^3\gamma^3(\beta+\delta) + \delta^3\beta^3(\alpha+\gamma)$$
$$= {e_2}^2 e_3 - 2e_1{e_3}^2 + 5e_3e_4 - e_1e_2e_4 = {e_2}^2 e_3 + 5e_3e_4$$

$$f_6 = \alpha^3\beta^3\gamma^3 + \beta^3\gamma^3\delta^3 + \gamma^3\delta^3\alpha^3 + \delta^3\alpha^3\beta^3$$
$$= {e_3}^3 - 3e_2e_3e_4 + 3e_1{e_4}^2 = {e_3}^3 - 3e_2e_3e_4$$

$$f_7 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = {e_1}^2 - 2e_2 = -2e_2$$

$$f_8 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\delta^2 + \delta^2\alpha^2 + \alpha^2\gamma^2 + \delta^2\beta^2$$
$$= {e_2}^2 - 2e_1e_3 + 2e_4 = {e_2}^2 + 2e_4$$

$$f_9 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2\alpha^2 + \delta^2\alpha^2\beta^2 = {e_3}^2 - 2e_2e_4$$

付録：判別式の計算（概略）

$f_1 \sim f_9$ の表式を代入すると

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\alpha)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\alpha)^2$$

$$\begin{aligned}
&= {e_3}^4 - 4{e_3}^3 \cdot 3e_3 + 4{e_2}^3{e_3}^2 + 8e_2{e_3}^2(-2{e_2}^2 + 4e_4) \\
&\qquad + 16{e_3}^2({e_2}^3 - 3e_2e_4 + 3{e_3}^2) - 8{e_2}^3{e_3}^2 \\
&\qquad - 16{e_2}^2e_3(-2e_2e_3) - 32e_2e_3({e_2}^2e_3 + 5e_3e_4) \\
&\qquad - 64e_3({e_3}^3 - 3e_2e_3e_4) + 16{e_2}^4e_4 \\
&\qquad + 32{e_2}^3e_4(-2e_2) + 64{e_2}^2e_4({e_2}^2 + 2e_4) \\
&\qquad + 128e_2e_4({e_3}^2 - 2e_2e_4) + 256{e_4}^3
\end{aligned}$$

付録:判別式の計算(概略)(つづき)

$$
\begin{aligned}
&= (1 - 12 + 48 - 64){e_3}^4 \\
&\qquad + (4 - 16 + 16 - 8 + 32 - 32){e_2}^3{e_3}^2 \\
&\qquad + (32 - 48 - 160 + 192 + 128)e_2{e_3}^2e_4 \\
&\qquad + (16 - 64 + 64){e_2}^4e_4 \\
&\qquad + (128 - 256){e_2}^2{e_4}^2 \\
&\qquad + 256{e_4}^3 \\
&= -27{e_3}^4 - 4{e_2}^3{e_3}^2 + 144e_2{e_3}^2e_4 + 16{e_2}^4e_4 - 128{e_2}^2{e_4}^2 + 256{e_4}^3
\end{aligned}
$$

付録:判別式の計算(概略)

解と係数の関係を用いて

$$
\begin{aligned}
D &= a^6(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\alpha)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 \\
&= a^6\big(-27{e_3}^4 - 4{e_2}^3{e_3}^2 + 144e_2{e_3}^2e_4 \\
&\qquad + 16{e_2}^4e_4 - 128{e_2}^2{e_4}^2 + 256{e_4}^3\big) \\
&= a^6\left(-27\left(-\frac{d}{a}\right)^4 - 4\left(\frac{c}{a}\right)^3\left(-\frac{d}{a}\right)^2 + 144\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{d}{a}\right)^2\left(\frac{e}{a}\right)\right. \\
&\qquad \left. +16\left(\frac{c}{a}\right)^4\left(\frac{e}{a}\right) - 128\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{e}{a}\right)^2 + 256\left(\frac{e}{a}\right)^3\right) \\
&= -27a^2d^4 - 4ac^3d^2 + 144a^2cd^2e \\
&\qquad + 16ac^4e - 128a^2c^2e^2 + 256a^3e^3
\end{aligned}
$$

付録：デカルトの解法

4次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

の両辺を a で割って

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + e = 0$$

$x = y - \dfrac{b}{4a}$ とおくと

$$\left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + \frac{d}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a} = 0$$

付録:デカルトの解法

左辺を展開して

$$y^4 - \frac{b}{a}y^3 + \frac{6b^2}{16a^2}y^2 - \frac{b^3}{16a^3}y + \frac{b^4}{256a^4}$$

$$+ \frac{b}{a}\left(y^3 - \frac{3b}{4a}y^2 + \frac{3b^2}{16a^2}y - \frac{b^3}{64a^3}\right) + \frac{c}{a}\left(y^2 - \frac{b}{2a}y + \frac{b^2}{16a^2}\right)$$

$$+ \frac{d}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a}$$

$$= y^4 + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)y^2 + \left(-\frac{b^3}{16a^3} + \frac{3b^3}{16a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right)y$$

$$+ \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

付録：デカルトの解法（つづき）

$$= y^4 + \left(-\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}\right) y^2 + \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right) y$$

$$- \frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

$$= y^4 + py^2 + qy + r$$

とおく。ここで、

$$p = -\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}, \qquad q = \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}$$

$$r = -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

である。

付録：デカルトの解法

さらに

$$
\begin{aligned}
y^4 + py^2 + qy + r &= (y^2 + sy + t)(y^2 + uy + v) \\
&= y^4 + (s+u)y + (su + t + v)y^2 + (sv + tu)y + tv
\end{aligned}
$$

とおいて係数を比較すると

$$
\begin{cases}
s + u = 0 \\
su + t + v = p \\
sv + tu = q \\
tv = r
\end{cases}
$$

である。

付録：デカルトの解法

ここで、$u=-s,\quad sv=q-tu$ を

$$s^2u+st+sv=ps$$

に代入して

$$s^2(-s)+st+\left(q-t(-s)\right)=ps$$

$$\therefore 2st=s^3+ps-q=s(s^2+p)-q$$

同様に、$u=-s,\quad tu=q-sv$

$$su^2+tu+uv=pu$$

に代入して

$$s(-s)^2+(q-sv)+(-s)v=p(-s)$$

$$\therefore 2sv=s^3+ps+q=s(s^2+p)+q$$

付録：デカルトの解法

したがって、

$$4s^2r = 4s^2tv = 2st \cdot 2sv = (s(s^2+p)-q)(s(s^2+p)+q)$$
$$= s^2(s^2+p)^2 - q^2$$

ここで、$w = s^2$ とおくと

$$4rw = w(w+p)^2 - q^2 = w^3 + 2pw^2 + p^2w - q^2$$
$$\therefore w^3 + 2pw^2 + (p^2-4r)w - q^2 = 0$$

これは元の4次方程式の3次分解方程式である。

付録：3次分解方程式

さらに、$w = z - \dfrac{2p}{3}$ とおくと

$$w^3 + 2pw^2 + (p^2 - 4r)w - q^2 = 0$$

より

$$\left(z - \frac{2p}{3}\right)^3 + 2p\left(z - \frac{2p}{3}\right)^2 + (p^2 - 4r)\left(z - \frac{2p}{3}\right) - q^2 = 0$$

左辺を展開して整理すると

$$z^3 - 2pz^2 + \frac{4p^2}{3}z - \frac{8p^3}{27} + 2p\left(z^2 - \frac{4p}{3}z + \frac{4p^2}{9}\right)$$
$$+ (p^2 - 4r)\left(z - \frac{2p}{3}\right) - q^2$$

付録：3次分解方程式（つづき）

$$= z^3 + \left(\frac{4p^2}{3} - \frac{8p^2}{3} + p^2 - 4r\right)z - \frac{8p^3}{27} + \frac{8p^3}{9} - \frac{2p^3}{3} + \frac{8pr}{3} - q^2$$

$$= z^3 + \left(-\frac{p^2}{3} - 4r\right)z - \frac{2p^3}{27} + \frac{8pr}{3} - q^2 = 0$$

となり、2次の項をもたない3次分解方程式を得る。

付録:3次分解方程式の判別式

この3次分解方程式の判別式は

$$D_3 = -4\left(-\frac{p^2}{3} - 4r\right)^3 - 27\left(-\frac{2p^3}{27} + \frac{8pr}{3} - q^2\right)^2$$

$$= \frac{4}{27}(p^2 + 12r)^3 - \frac{1}{27}(2p^3 - 72pr + 27q^2)^2$$

$$= \frac{1}{27}\left(4(p^2 + 12r)^3 - (2p^3 - 72pr + 27q^2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{27}\Big(4(p^6 + 36p^4 r + 3 \cdot 12^2 p^2 r^2 + 12^3 r^3)$$

$$- (4p^6 + 72^2 p^2 r^2 + 27^2 q^2 - 4 \cdot 72 p^4 r - 144 \cdot 27 p q^2 r + 4 \cdot 27 p^3 q^2)\Big)$$

p. 28以降では
この表式を用いて
判別式を計算する

付録:3次分解方程式の判別式(つづき)

$$= \frac{1}{27}\Big(4\cdot 36p^4r + 12\cdot 12^2p^2r^2 + 4\cdot 12^3r^3$$
$$- 6^2\cdot 12^2p^2r^2 - 27^2q^2 + 4\cdot 72p^4r + 144\cdot 27pq^2r - 4\cdot 27p^3q^2\Big)$$

$$= \frac{1}{27}\Big(4\cdot 108p^4r - 24\cdot 12^2p^2r^2 + 4\cdot 12^3r^3$$
$$- 27^2q^2 + 144\cdot 27pq^2r - 4\cdot 27p^3q^2\Big)$$

$$= 4\cdot 4p^4r - 8\cdot 4^2p^2r^2 + 4\cdot 4^3r^3 - 27q^2 + 144pq^2r - 4p^3q^2$$

$$= 16p^4r - 128p^2r^2 + 256r^3 - 27q^2 + 144pq^2r - 4p^3q^2$$

$$= 16p^4r - 128p^2r^2 + 256r^3 - 4p^3q^2 - 27q^2 + 144pq^2r$$

$$= 16r(p^2 - 4r)^2 + q^2(-4p^3 - 27) + 16rq^2\cdot 9p$$

付録:3次分解方程式の判別式

以下、

$$p=-\frac{3b^2}{8a^2}+\frac{c}{a},\qquad q=\frac{b^3}{8a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a}$$

$$r=-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{e}{a}$$

より

$$D_3=\frac{1}{27}\left(4(p^2+12r)^3-(2p^3-72pr+27q^2)^2\right)$$

を計算する。

付録:3次分解方程式の判別式

$$p^2 + 12r = \left(-\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}\right)^2 + 12\left(-\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}\right)$$

$$= \frac{9b^4}{64a^2} - \frac{3b^2c}{4a^3} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{9b^4}{64a^4} + \frac{3b^2c}{4a^3} - \frac{3bd}{a^2} + \frac{12e}{a}$$

$$= \frac{c^2}{a^2} - \frac{3bd}{a^2} + \frac{12e}{a}$$

$$= \frac{c^2 - 3bd + 12ae}{a^2}$$

$$\therefore (p^2 + 12r)^3 = \frac{(c^2 - 3bd + 12ae)^3}{a^6}$$

付録:3次分解方程式の判別式

$$
\begin{aligned}
2p^3 &= 2\left(-\frac{3b^2}{8a^2}+\frac{c}{a}\right)^3 \\
&= 2\left(-\frac{27b^6}{512a^6}+\frac{27b^4c}{64a^5}-\frac{9b^2c^2}{8a^4}+\frac{c^3}{a^3}\right) \\
&= -\frac{27b^6}{256a^6}+\frac{27b^4c}{32a^5}-\frac{9b^2c^2}{4a^4}+\frac{2c^3}{a^3}
\end{aligned}
$$

付録:3次分解方程式の判別式

$$72pr = 72\left(-\frac{3b^2}{8a^2}+\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{e}{a}\right)$$

$$= 9\left(-\frac{3b^2}{a^2}+\frac{8c}{a}\right)\left(-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{e}{a}\right)$$

$$= 9\left(\frac{9b^6}{256a^6}-\frac{3b^4c}{16a^5}+\frac{3b^3d}{4a^4}-\frac{3b^2e}{a^3}\right.$$
$$\left.-\frac{3b^4c}{32a^5}+\frac{b^2c^2}{2a^4}-\frac{2bcd}{a^3}+\frac{8ce}{a^2}\right)$$

$$= \frac{81b^6}{256a^6}-\frac{81b^4c}{32a^5}+\frac{9b^2c^2}{2a^4}+\frac{27b^3d}{4a^4}-\frac{27b^2e}{a^3}-\frac{18bcd}{a^3}+\frac{72ce}{a^2}$$

付録:3次分解方程式の判別式

$$
\begin{aligned}
27q^2 &= 27\left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right)^2 \\
&= 27\left(\frac{b^6}{64a^6} + \frac{b^2c^2}{4a^4} + \frac{d^2}{a^2} - \frac{b^4c}{8a^5} - \frac{bcd}{a^3} + \frac{b^3d}{4a^4}\right) \\
&= 27\left(\frac{b^6}{64a^6} - \frac{b^4c}{8a^5} + \frac{b^2c^2}{4a^4} + \frac{b^3d}{4a^4} - \frac{bcd}{a^3} + \frac{d^2}{a^2}\right) \\
&= \frac{27b^6}{64a^6} - \frac{27b^4c}{8a^5} + \frac{27b^2c^2}{4a^4} + \frac{27b^3d}{4a^4} - \frac{27bcd}{a^3} + \frac{27d^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

付録:3次分解方程式の判別式

したがって、

$$2p^3 - 72pr + 27q^2 = -\frac{27b^6}{256a^6} + \frac{27b^4c}{32a^5} - \frac{9b^2c^2}{4a^4} + \frac{2c^3}{a^3}$$

$$-\frac{81b^6}{256a^6} + \frac{81b^4c}{32a^5} - \frac{9b^2c^2}{2a^4} - \frac{27b^3d}{4a^4} + \frac{27b^2e}{a^3} + \frac{18bcd}{a^3} - \frac{72ce}{a^2}$$

$$+\frac{27b^6}{64a^6} - \frac{27b^4c}{8a^5} + \frac{27b^2c^2}{4a^4} + \frac{27b^3d}{4a^4} - \frac{27bcd}{a^3} + \frac{27d^2}{a^2}$$

$$= \frac{-27 - 81 + 108}{256a^6}b^6 + \frac{27 + 81 - 108}{32a^5}b^4c + \frac{-9 - 18 + 27}{4a^4}b^2c^2$$

$$+\frac{2c^3}{a^3} + \frac{27b^2e}{a^3} + \frac{18 - 27}{a^3}bcd - \frac{72ce}{a^2} + \frac{27d^2}{a^2}$$

付録:3次分解方程式の判別式(つづき)

$$= \frac{2c^3}{a^3} + \frac{27b^2e}{a^3} - \frac{9bcd}{a^3} - \frac{72ce}{a^2} + \frac{27d^2}{a^2}$$

$$= \frac{2c^3 + 27b^2e - 9bcd - 72ace + 27ad^2}{a^3}$$

$$\therefore (2p^3 - 72pr + 27q^2)^2 = \frac{(2c^3 + 27b^2e - 9bcd - 72ace + 27ad^2)^2}{a^6}$$

付録:3次分解方程式の判別式

$$
\begin{aligned}
a^6(p^2+12r)^3 &= (c^2-3bd+12ae)^3 \\
&= c^6 - 27b^3d^3 + 4^3\cdot 27a^3e^3 \\
&\quad - 9bc^4d + 36ac^4e + 27b^2c^2d^2 + 27\cdot 12ab^2d^2e \\
&\quad + 3\cdot 12^2a^2c^2e^2 - 27\cdot 4^2a^2bde^2 - 18\cdot 12abc^2de
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
a^6(2p^3-72pr+27q^2)^2 &= (2c^3+27b^2e-9bcd-72ace+27ad^2)^2 \\
&= 4c^6 + 27^2b^4e^2 + 81b^2c^2d^2 + 72^2a^2c^2e^2 + 27^2a^2d^4 \\
&\quad + 4\cdot 27b^2c^3e - 36bc^4d - 4\cdot 72ac^4e + 4\cdot 27ac^3d^2 \\
&\quad - 18\cdot 27b^3cde - 27\cdot 144ab^2ce^2 + 2\cdot 27^2ab^2d^2e \\
&\quad + 18\cdot 72abc^2de - 18\cdot 27abcd^3 - 144\cdot 27a^2cd^2e
\end{aligned}
$$

付録:3次分解方程式の判別式

より

$$a^6(4(p^2+12r)^3-(2p^3-72pr+27q^2)^2)$$

$$\begin{aligned}
&= 4c^6 - 4\cdot 27b^3d^3 + 4^4\cdot 27a^3e^3 \\
&\quad - 36bc^4d + 4\cdot 36ac^4e + 4\cdot 27b^2c^2d^2 + 27\cdot 48ab^2d^2e \\
&\quad + 12\cdot 12^2a^2c^2e^2 - 27\cdot 4^3a^2bde^2 - 72\cdot 12abc^2de \\
&\quad - 4c^6 - 27^2b^4e^2 - 81b^2c^2d^2 - 72^2a^2c^2e^2 - 27^2a^2d^4 \\
&\quad - 4\cdot 27b^2c^3e + 36bc^4d + 4\cdot 72ac^4e - 4\cdot 27ac^3d^2 \\
&\quad + 18\cdot 27b^3cde + 27\cdot 144ab^2ce^2 - 2\cdot 27^2ab^2d^2e \\
&\quad - 18\cdot 72abc^2de + 18\cdot 27abcd^3 + 144\cdot 27a^2cd^2e
\end{aligned}$$

ここで c^6 と bc^4d の項が消える

付録:3次分解方程式の判別式(つづき)

$$
\begin{aligned}
= -4\cdot 27b^3d^3 + 4^4\cdot 27a^3e^3 - 27\cdot 4^3a^2bde^2 \\
+ 4\cdot 36ac^4e + 4\cdot 72ac^4e + 4\cdot 27b^2c^2d^2 - 81b^2c^2d^2 \\
+ 27\cdot 48ab^2d^2e - 2\cdot 27^2ab^2d^2e + 12\cdot 12^2a^2c^2e^2 - 72^2a^2c^2e^2 \\
- 72\cdot 12abc^2de - 18\cdot 72abc^2de \\
- 27^2b^4e^2 - 27^2a^2d^4 - 4\cdot 27b^2c^3e - 4\cdot 27ac^3d^2 \\
+ 18\cdot 27b^3cde + 18\cdot 27abcd^3 \\
+ 27\cdot 144ab^2ce^2 + 144\cdot 27a^2cd^2e
\end{aligned}
$$

付録:3次分解方程式の判別式(つづき)

$$= -4\cdot 27b^3d^3 + 256\cdot 27a^3e^3 - 27\cdot 64a^2bde^2$$
$$+ 6\cdot 72ac^4e + 27b^2c^2d^2$$
$$- 27\cdot 6ab^2d^2e - 24\cdot 12^2a^2c^2e^2$$
$$- 30\cdot 72abc^2de$$
$$- 27^2b^4e^2 - 27^2a^2d^4 - 4\cdot 27b^2c^3e - 4\cdot 27ac^3d^2$$
$$+ 18\cdot 27b^3cde + 18\cdot 27abcd^3$$
$$+ 27\cdot 144ab^2ce^2 + 144\cdot 27a^2cd^2e$$

付録:3次分解方程式の判別式(つづき)

$$= 27\big(-4b^3d^3 + 256a^3e^3 - 192a^2bde^2$$
$$+ 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 6ab^2d^2e - 128a^2c^2e^2 - 80abc^2de$$
$$- 27b^4e^2 - 27a^2d^4 - 4b^2c^3e - 4ac^3d^2$$
$$+ 18b^3cde + 18abcd^3 + 144ab^2ce^2 + 144a^2cd^2e\big)$$

$$= 27\big(256a^3e^3 - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2$$
$$- 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 16ac^4e + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3$$
$$- 4ac^3d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 - 27b^4e^2$$
$$+ 18abcd^3 + 18b^3cde + 144a^2cd^2e + 144ab^2ce^2\big)$$

$$= 27D$$