3次方程式の判別式

渡邉 俊夫

3次方程式の判別式

実数を係数とする3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の判別式は、方程式の3つの解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ として

$$D = a^4(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

で定義される。本稿では、この判別式が、方程式の係数を用いて

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

と表されることを示す。

3次方程式の判別式

2次方程式の判別式の定義については補足を参照

実数を係数とする3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の**判別式**を、方程式の3つの解 $x=\alpha,\beta,\gamma$ により

$$D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

と定義する。α,β,γ が異なる3つの**実数解**であるとき

$$D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2>0$$

である。また、α,β,γ のうち**重解**があるとき

$$D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=0$$

である。いっぽう、α が**実数解**で β,γ が**虚数解**であるとき β,γ は互いに複素共役で $\gamma=\bar{\beta}$ であるから

$$D=a^4(\alpha-\beta)^2\left(\beta-\bar{\beta}\right)^2\left(\bar{\beta}-\alpha\right)^2=a^4|\alpha-\beta|^4(2i\,\mathrm{Im}\,\beta)^2$$
$$=-4a^2|\alpha-\beta|^4(\mathrm{Im}\,\beta)^2<0$$

複素数 $z=x+iy$ の複素共役 $\bar{z}=x-iy$ に対して

$$|z|^2=x^2+y^2=z\bar{z}$$

$$\mathrm{Re}\,z=x=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}\,z=y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

解と係数の関係

2次方程式
$ax^2 + bx + c = 0$
の解と係数の関係は
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の3つの解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ とすると、方程式は

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$$

の形で表せるはずである。左辺を展開すると

$$\begin{aligned} & a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)(x-\gamma) \\ &= a(x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

となるから、各項の係数を比較して、解と係数の関係を得る。

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

判別式の計算

$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ を
α,β,γ の基本対称式という

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の判別式

$$D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

を、解 α,β,γ の基本対称式

$$e_1=\alpha+\beta+\gamma,\quad e_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\quad e_3=\alpha\beta\gamma$$

で表す。まず、

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)&=-\gamma\alpha+(\gamma+\alpha)\beta-\beta^2\\&=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\gamma+\alpha)\beta-\beta^2\\&=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)\beta-2\beta^2-\beta^2\\&=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)\beta-3\beta^2\\&=-e_2+2e_1\beta-3\beta^2\end{aligned}$$

判別式の計算

同様に

$$(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=-e_2+2e_1\gamma-3\gamma^2$$

$$(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=-e_2+2e_1\alpha-3\alpha^2$$

だから

$$\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2\\
&=(-e_2+2e_1\beta-3\beta^2)\cdot(-e_2+2e_1\gamma-3\gamma^2)\cdot(-e_2+2e_1\alpha-3\alpha^2)\\
&=-{e_2}^3+2e_1{e_2}^2(\alpha+\beta+\gamma)-3{e_2}^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\
&\quad-4{e_1}^2e_2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9e_2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\\
&\quad+6e_1e_2\left(\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)\right)\\
&\quad+8{e_1}^3\alpha\beta\gamma-12{e_1}^2(\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta)\\
&\quad+18e_1(\alpha\beta^2\gamma^2+\beta\gamma^2\alpha^2+\gamma\alpha^2\beta^2)-27\alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}$$

判別式の計算

$e_1 = \alpha + \beta + \gamma$
$e_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
$e_3 = \alpha\beta\gamma$

$$
\begin{aligned}
&= -{e_2}^3 + 2{e_1}^2{e_2}^2 - 3{e_2}^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\
&\quad - 4{e_1}^2{e_2}^2 - 9e_2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) \\
&\quad + 6e_1e_2\left(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta)\right) \\
&\quad + 8{e_1}^3e_3 - 12{e_1}^2(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma \\
&\quad + 18e_1(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)\alpha\beta\gamma - 27{e_3}^2 \\
&= -{e_2}^3 + 2{e_1}^2{e_2}^2 - 3{e_2}^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\
&\quad - 4{e_1}^2{e_2}^2 - 9e_2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) \\
&\quad + 6e_1e_2\left(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta)\right) \\
&\quad + 8{e_1}^3e_3 - 12{e_1}^3e_3 \\
&\quad + 18e_1e_2e_3 - 27{e_3}^2
\end{aligned}
$$

判別式の計算

ここで、

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)={e_1}^2-2e_2$$

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\\&\quad-2(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta)\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\beta+\gamma+\alpha)\alpha\beta\gamma\\&={e_2}^2-2e_1e_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)\\&\quad-3\alpha\beta\gamma\\&=e_2e_1-3e_3\end{aligned}$$

だから

判別式の計算

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 &= -e_2{}^3 + 2e_2{}^2e_1{}^2 - 3e_2{}^2(e_1{}^2 - 2e_2) \\
&\quad - 4e_2{}^2e_1{}^2 - 9e_2(e_2{}^2 - 2e_1e_3) \\
&\quad + 6e_2e_1(e_2e_1 - 3e_3) \\
&\quad + 8e_1{}^3e_3 - 12e_1{}^3e_3 + 18e_1e_2e_3 - 27e_3{}^2 \\
&= -e_2{}^3 + 2e_2{}^2e_1{}^2 - 3e_2{}^2e_1{}^2 + 6e_2{}^3 \\
&\quad - 4e_2{}^2e_1{}^2 - 9e_2{}^3 + 18e_1e_2e_3 \\
&\quad + 6e_2{}^2e_1{}^2 - 18e_1e_2e_3 \\
&\quad + 8e_1{}^3e_3 - 12e_1{}^3e_3 + 18e_1e_2e_3 - 27e_3{}^2 \\
&= e_2{}^2e_1{}^2 - 4e_2{}^3 - 4e_1{}^3e_3 \\
&\quad - 27e_3{}^2 + 18e_1e_2e_3
\end{aligned}
$$

$e_1 = \alpha + \beta + \gamma$

$e_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

$e_3 = \alpha\beta\gamma$

判別式の計算

$$e_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad e_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad e_3 = \alpha\beta\gamma$$

より

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 &= {e_1}^2{e_2}^2 - 4{e_2}^3 - 4{e_1}^3e_3 \\ &\quad - 27{e_3}^2 + 18e_1e_2e_3 \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \\ &\quad - 4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 - 4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma \\ &\quad - 27\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\ &\quad + 18(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

判別式の計算

解と係数の関係は $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

したがって、

$$
\begin{aligned}
D &= a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 \\
&= a^4(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-4a^4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad -4a^4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma-27a^4\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&\qquad +18a^4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma \\
&= a^4\left(-\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right)^2-4a^4\left(\frac{c}{a}\right)^3 \\
&\qquad -4a^4\left(-\frac{b}{a}\right)^3\left(-\frac{d}{a}\right)-27a^4\left(-\frac{d}{a}\right)^3+18a^4\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{d}{a}\right) \\
&= b^2c^2-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2+18abcd
\end{aligned}
$$

検算：特殊な場合

3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の判別式

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

は、$a = 1, b = 0$ とすると

$$D = -4c^3 - 27d^2$$

となる。これは3次方程式

$$x^3 + cx + d = 0$$

の判別式である。

検算：特殊な場合

3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の判別式

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

は、$d = 0$ とすると

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 = c^2(b^2 - 4ac)$$

となる。右辺に現れる $b^2 - 4ac$ は2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の判別式である。

検算:特殊な場合

3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の判別式

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

は、仮に $a = 0$ とすると

$$D = b^2c^2 - 4b^3d = b^2(c^2 - 4bd)$$

となる。右辺に現れる $c^2 - 4bd$ は2次方程式

$$bx^2 + cx + d = 0$$

の判別式である。

まとめ

実数を係数とする3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の3つの解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ として、3次方程式の**判別式**を

$$D = a^4(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

で定義する。これを方程式の係数で表すと

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

となる。

<u>参考文献</u>

中村亨「ガロアの群論ー方程式はなぜ解けなかったのか」講談社、2010.

補足:2次方程式の判別式

2次方程式式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式

$$D=b^2-4ac$$

は、解と係数の関係

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

を用いると

$$D=b^2-4ac=\left(-a(\alpha+\beta)\right)^2-4a\cdot a\alpha\beta$$
$$=a^2\left((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right)$$
$$=a^2(\alpha-\beta)^2$$

と表される。

2次方程式の解を $x=\alpha,\beta$ とすると

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

より

$$a(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)=0$$

である。これと

$$ax^2+bx+c=0$$

の係数を比較して

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

補足:2次方程式の判別式

実数を係数とする2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\alpha,\beta$ が異なる2つの実数であるとき

$$D=a^2(\alpha-\beta)^2>0$$

である。また、$x=\alpha,\beta$ が重解であるとき、$\beta=\alpha$ だから

$$D=a^2(\alpha-\alpha)^2=0$$

である。いっぽう、$x=\alpha,\beta$ が虚数解であるとき、α,β は互いに複素共役で $\beta=\bar{\alpha}$ であるから

$$D=a^2(\alpha-\bar{\alpha})^2=a^2(2i\,\mathrm{Im}\,\alpha)^2=-4a^2(\mathrm{Im}\,\alpha)^2<0$$

となる。

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の両辺の複素共役をとると $a\bar{x}^2+b\bar{x}+c=0$ となるから、$x=\alpha$ が解のとき $x=\bar{\alpha}$ も解である。

別解：判別式の計算

$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ を
α,β,γ の基本対称式という

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の判別式

$$D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

を、解 α,β,γ の基本対称式で表す。まず、

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)=-\gamma\alpha+(\gamma+\alpha)\beta-\beta^2=\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha-\beta^2$$

$$(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=-\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma-\gamma^2=-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\gamma^2$$

$$(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=-\beta\gamma+(\beta+\gamma)\alpha-\alpha^2=\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha-\alpha^2$$

より

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=&(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha-\beta^2)\\&\cdot(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\gamma^2)\\&\cdot(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

別解：判別式の計算(つづき)

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha) \\
&\qquad -(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha^2 \\
&\qquad -(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)\beta^2 \\
&\qquad -(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)\gamma^2 \\
&\qquad +(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)\gamma^2\alpha^2+(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha^2\beta^2 \\
&\qquad +(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)\beta^2\gamma^2 \\
&\qquad -\alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}
$$

別解：判別式の計算

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

$$=\boxed{(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)} \quad ①$$

$$\boxed{\begin{aligned}&-(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha^2\\&-(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)\beta^2\\&-(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)\gamma^2\end{aligned}} \quad ②$$

$$\boxed{\begin{aligned}&+(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)\gamma^2\alpha^2+(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha^2\beta^2\\&+(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)\beta^2\gamma^2\end{aligned}} \quad ③$$

$$-\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

の①～③について、以下、個別に計算する。

別解：判別式の計算①

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha) \\
&= \big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\gamma\alpha\big)\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\big) \\
&\qquad \cdot\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\beta\gamma\big) \\
&= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3-(2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \\
&\qquad +4(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-8\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha \\
&= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad +4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-8\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&= -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma-8\alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}
$$

別解：判別式の計算②

$$
\begin{aligned}
&-(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha^2\\
&\quad-(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)\beta^2\\
&\quad-(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)\gamma^2\\
&=-\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\gamma\alpha\big)\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\big)\alpha^2\\
&\quad-\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\big)\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\beta\gamma\big)\beta^2\\
&\quad-\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\beta\gamma\big)\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\gamma\alpha\big)\gamma^2\\
&=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\
&\quad+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big((\gamma\alpha+\alpha\beta)\alpha^2+(\alpha\beta+\beta\gamma)\beta^2+(\beta\gamma+\gamma\alpha)\gamma^2\big)\\
&\quad-4(\gamma\alpha\cdot\alpha\beta\cdot\alpha^2+\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\beta^2+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\gamma^2)
\end{aligned}
$$

緑字の箇所の計算は補足を参照

別解：判別式の計算②（つづき）

$$
\begin{aligned}
&= -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\
&\qquad + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big((\gamma+\beta)\alpha^3+(\alpha+\gamma)\beta^3+(\beta+\alpha)\gamma^3\big) \\
&\qquad - 4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\alpha\beta\gamma \\
&= -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\
&\qquad + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma\big) \\
&\qquad - 4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\alpha\beta\gamma \\
&= -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\big((\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big) \\
&\qquad + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\Big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big((\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big) \\
&\qquad\qquad - (\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma\Big) \\
&\qquad - 4\Big((\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma\Big)\alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

別解：判別式の計算②（つづき）

$$
\begin{aligned}
&= -(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad + 2(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad - 2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma \\
&\qquad - 4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma + 12(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma \\
&\qquad - 12\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad + 10(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma \\
&\qquad - 4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma - 12\alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}
$$

別解：判別式の計算③

緑字の箇所の計算は補足を参照

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha)\gamma^2\alpha^2+(-\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha^2\beta^2+(\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)\beta^2\gamma^2 \\
&=\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\gamma\alpha\big)\gamma^2\alpha^2+\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\big)\alpha^2\beta^2 \\
&\qquad+\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\beta\gamma\big)\beta^2\gamma^2 \\
&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)-2(\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3) \\
&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)\big) \\
&\qquad-2\big((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad\qquad-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)+3\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\big) \\
&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma \\
&\qquad-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3+6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma-6\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma-6\alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}
$$

別解：判別式の計算

以上より

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 && ①\\
=&\boxed{-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma-8\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\
&+(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3\\
&+10(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma && ②\\
&-4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma-12\alpha^2\beta^2\gamma^2\\
&\boxed{-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma-6\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\
&-\alpha^2\beta^2\gamma^2 && ③
\end{aligned}
$$

別解：判別式の計算（つづき）

$$
\begin{aligned}
&= -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 + 4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma - 8\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&\qquad + (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad + 10(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma \\
&\qquad - 4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma - 12\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&\qquad - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 + 4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma - 6\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&\qquad - \alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \\
&\qquad - 4(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma - 27\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&\qquad + 18(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

補足：対称式の計算

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma) \\
&= \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right)(\alpha+\beta+\gamma) \\
&= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma) \\
&\qquad +2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\
&= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta) \\
&\qquad +2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\
&= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma \\
&\qquad +2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\
&= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

補足：累乗和と対称式

これより、基本対称式 $e_1 = \alpha + \beta + \gamma, e_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, e_3 = \alpha\beta\gamma$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= {e_1}^2 - 2e_2 \\ &= e_1(\alpha + \beta + \gamma) - 2e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= {e_1}^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 \\ &= e_1({e_1}^2 - 2e_2) - e_2e_1 + 3e_3 \\ &= e_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - e_2(\alpha + \beta + \gamma) + 3e_3 \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

補足：累乗和と対称式

一般に、累乗和 $p_k = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^k$ に対して

$k \leq n$ では

$$p_k = (-1)^{k-1} k e_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} e_i p_{k-i}$$

$k > n$ では

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} e_i p_{k-i}$$

が成り立つ。これをジラール-ニュートンの恒等式という。

$n = 3$ のとき

$p_1 = e_1$

$p_2 = e_1 p_1 - 2e_2$

$p_3 = e_1 p_2 - e_2 p_1 + 3e_3$

および

$p_4 = e_1 p_3 - e_2 p_2 + e_3 p_1$

$p_5 = e_1 p_4 - e_2 p_3 + e_3 p_2$

$\cdots$

補足：カルダノの解法

3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の両辺を a で割って

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

$x = y - \dfrac{b}{3a}$ とおくと

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

補足:カルダノの解法

展開して整理すると

$$y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}\left(y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2}\right) + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

ここで、$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a},\quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ とおくと

$$y^3 + py + q = 0$$

補足:カルダノの解法

ここで、$y^3+py+q=0$ の解を $y=u,v,w$ とすると

$$y^3+py+q=(y-u)(y-v)(y-w)$$
$$=y^3-(u+v+w)y^2+(uv+vw+wu)y-uvw$$

より

$$u+v+w=0 \qquad \therefore w=-u-v$$

だから y に $w=-u-v$ を代入して

$$-(u+v)^3-p(u+v)+q=-u^3-3u^2v-3uv^2-v^3-p(u+v)+q$$
$$=-u^3-3uv(u+v)-v^3-p(u+v)+q$$
$$=-u^3-v^3+q-(3uv+p)(u+v)=0$$

$$\therefore u^3+v^3=q,\quad 3uv=-p$$

補足:カルダノの解法

したがって

$$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = q$$

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

$t = u^3$ とおくと

$$t^2 - qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

この t についての2次方程式の判別式は

$$D_2 = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$$

この方程式を、元の3次方程式の2次分解方程式という

補足:2次分解方程式の判別式

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
27^2 a^6 D_2 &= 27a^6(4p^3 + 27q^2) \\
&= 4 \cdot 27a^6 \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \right)^3 + 27^2 a^6 \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right)^2 \\
&= 4(-b^2 + 3ac)^3 + (2b^3 - 9abc + 27a^2 d)^2 \\
&= 4(-b^6 + 9ab^4c - 27a^2b^2c^2 + 27a^3c^3) \\
&\qquad + 4b^6 + 81a^2b^2c^2 + 27^2a^4d^2 \\
&\qquad - 36ab^4c - 18 \cdot 27a^3bcd + 4 \cdot 27a^2b^3d
\end{aligned}$$

補足:2次分解方程式の判別式(つづき)

$$
\begin{aligned}
&= -4b^6 + 36ab^4c - 4\cdot 27a^2b^2c^2 + 4\cdot 27a^3c^3 \\
&\qquad + 4b^6 + 81a^2b^2c^2 + 27^2a^4d^2 \\
&\qquad - 36ab^4c - 18\cdot 27a^3bcd + 4\cdot 27a^2b^3d \\
&= -4\cdot 27a^2b^2c^2 + 81a^2b^2c^2 + 4\cdot 27a^3c^3 \\
&\qquad + 27^2a^4d^2 - 18\cdot 27a^3bcd + 4\cdot 27a^2b^3d \\
&= -4\cdot 27a^2b^2c^2 + 3\cdot 27a^2b^2c^2 + 4\cdot 27a^3c^3 \\
&\qquad + 27^2a^4d^2 - 18\cdot 27a^3bcd + 4\cdot 27a^2b^3d \\
&= -27a^2b^2c^2 + 4\cdot 27a^3c^3 \\
&\qquad + 27^2a^4d^2 - 18\cdot 27a^3bcd + 4\cdot 27a^2b^3d \\
&= -27a^2(b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4b^3d)
\end{aligned}
$$

補足:2次分解方程式の判別式

$$27^2 a^6 D_2 = -27a^2(b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4b^3d)$$

より

$$\begin{aligned} -27a^4 D_2 &= b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4b^3d \\ &= b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd \end{aligned}$$

となる。これは3次方程式の判別式に一致する。

補足：判別式の性質

3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

は $d \neq 0$ のとき $x \neq 0$ だから、両辺を x^3 で割って $t = 1/x^3$ とおくと

$$dt^3 + ct^2 + bt + a = 0$$

となる。この方程式の判別式は、元の方程式の判別式と符号が一致するはずである。これが任意の a, b, c, d に対して成り立つためには、$a \leftrightarrow d$、$b \leftrightarrow c$ を同時に入れ替えても判別式の形は変わらないことが必要である。実際、

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

はそれを満たしている。

補足：判別式の性質

α, β, γ についての次数を考えると、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ は6次の項のみで表されるはずである。いっぽう、対称式

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

はそれぞれ1次、2次、3次だから、展開したときに含まれるのは

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2,\quad \left(\frac{c}{a}\right)^3,\quad \frac{b}{a}\frac{c}{a}\frac{d}{a},\quad \left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right)^2,\quad \left(\frac{b}{a}\right)^3\frac{d}{a},\quad \left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{c}{a}$$

に限られる。したがって、判別式 $D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ に含まれる可能性があるのは $a^2d^2, ac^3, abcd, b^2c^2, b^3d, b^4c/a$ である。しかし、$a\leftrightarrow d$、$b\leftrightarrow c$ を同時に入れ替えても D は変わらないから、b^4c/a は含まれない。以上より、3次方程式の判別式には $a^2d^2, ac^3, abcd, b^2c^2, b^3d$ だけが含まれることがわかる。

おまけ:a^2d^2 の係数

A, B を定数として、3次方程式の判別式を

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + Aa^2d^2 + Babcd$$

とする。方程式の解が $x = 1$(重解), -2 のとき

$$(x-1)^2(x+2) = (x^2 - 2x + 1)(x+2) = x^3 - 3x + 2 = 0$$

より、$a = 1, b = 0, c = -3, d = 2$ である。このとき

$$D = -4ac^3 + Aa^2d^2$$

$$= -4 \cdot 1 \cdot (-3)^3 + A \cdot 1^2 \cdot 2^2 = 4(27 + A) = 0$$

になるためには

$$A = -27$$

おまけ：$abcd$ の係数

A, B を定数として、3次方程式の判別式を

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + Aa^2d^2 + Babcd$$

とする。方程式の解が $x = -1$（3重解）のとき

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

より、$a = 1, b = 3, c = 3, d = 1$ である。このとき

$$D = 3^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^3 + A + B \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 81 - 4 \cdot 27 - 4 \cdot 27 + A + 9B = -135 + A + 9B = 0$$

になるためには、$A = -27$ より

$$B = \frac{135 - A}{9} = \frac{135 + 27}{9} = \frac{162}{9} = 18$$