三角関数の厳密値
（10°刻み）

渡邉 俊夫

目標

三角関数 $\sin\theta$ の厳密値を $10°$ 刻みで求める。

余角の公式 $\sin(90° - \theta) = \cos\theta, \cos(90° - \theta) = \sin\theta$
補角の公式 $\sin(180° - \theta) = \sin\theta, \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
負角の公式 $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta$
周期性 $\sin(\theta + 360° \times n) = \sin\theta, \cos(\theta + 360° \times n) = \cos\theta$ (n は整数)

より、$\theta = 0°, 10°, 20°, \cdots, 90°$ において $\sin\theta$ の値を求めれば、$10°$ の整数倍の任意の角度 θ における $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値が定まる。

なお、θ が鋭角の範囲 $0° \le \theta \le 90°$ では、$0 \le \sin\theta \le 1, 1 \ge \cos\theta \ge 0$ である。

3倍角の公式

3倍角の公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より

$$\sin(3 \times 10^\circ) = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$$

$x = \sin 10^\circ$ とおくと、$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3$$

よって、x は3次方程式

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$$

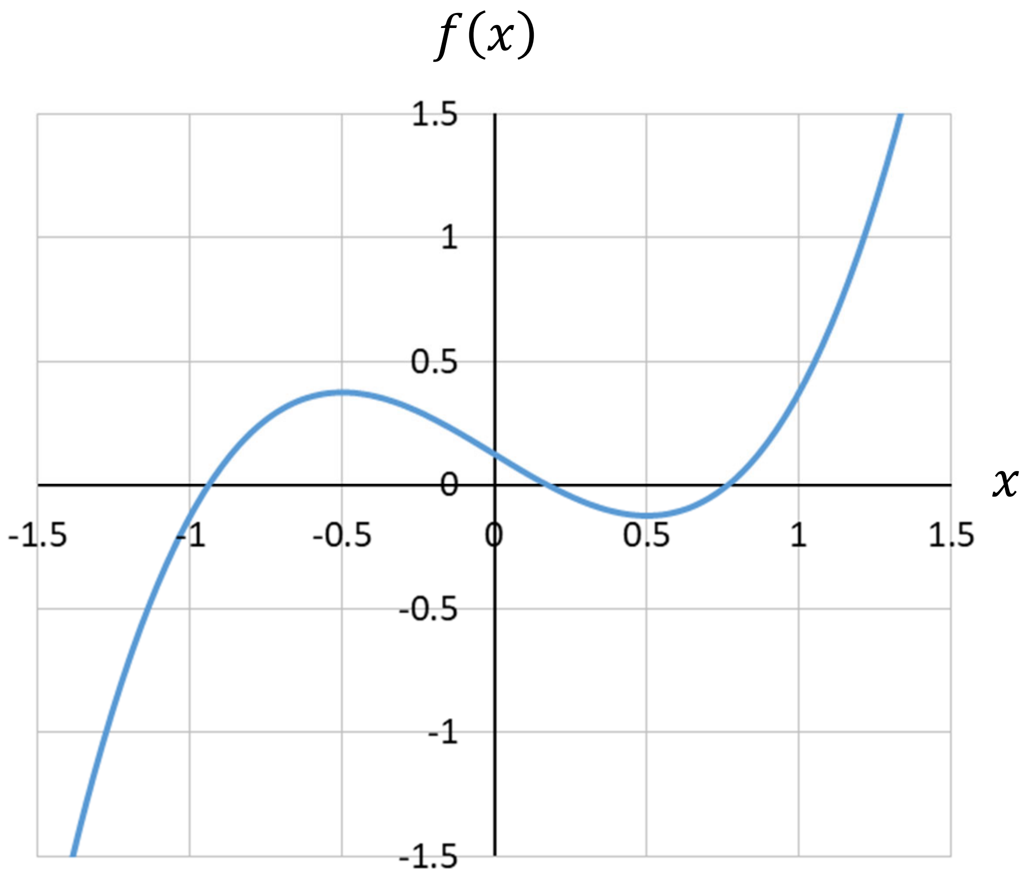
の解である。

3次方程式

$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ のグラフは右下図のようになり、

3次方程式 $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ は

$-1 \leq x \leq 1$ の範囲に
3つの実数解をもつ。



カルダノの方法

$x^3-3uvx-(u^3+v^3)$ は、1 の3乗根 $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ を用いると

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=(x-u-v)(x-\omega u-\bar{\omega}v)(x-\bar{\omega}u-\omega v)$$

と因数分解できる。これより、3次方程式 $x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$ の解は

$$u^3+v^3=-\frac{1}{8},\quad uv=\frac{1}{4}$$

とおくと、$x=u+v,\quad \omega u+\bar{\omega}v,\quad \bar{\omega}u+\omega v$ である。

3次方程式の解

$$u^3+v^3=-\frac{1}{8},\quad uv=\frac{1}{4}$$ より

$$u^3+\left(\frac{1}{4u}\right)^3+\frac{1}{8}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 64u^6+8u^3+1=0$$

$$\therefore u^3=\frac{-4\pm i\sqrt{48}}{64}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{16}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{8\cdot 2}$$

求める解 $x=u+v$ は u,v について対称だから、上式の正号を u, 負号を v とすると、

$$u^3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{8\cdot 2}=\frac{\omega}{8},\quad v^3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{8\cdot 2}=\frac{\overline{\omega}}{8}$$

3次方程式の解

$u^3 = \dfrac{\omega}{8},\quad v^3 = \dfrac{\bar{\omega}}{8}$ より、3次方程式 $x^3 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} = 0$ の3つの実数解は

$$x_1 = u + v = \frac{\omega^{1/3} + \bar{\omega}^{1/3}}{2} = \mathrm{Re}\,\omega^{1/3}$$

$$x_2 = \omega u + \bar{\omega} v = \frac{\omega \cdot \omega^{1/3} + \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}^{1/3}}{2} = \frac{\omega^{4/3} + \bar{\omega}^{4/3}}{2} = \mathrm{Re}\,\omega^{4/3}$$

$$x_3 = \bar{\omega} u + \omega v = \frac{\bar{\omega} \cdot \omega^{1/3} + \omega \cdot \bar{\omega}^{1/3}}{2} = \frac{\bar{\omega}^{2/3} + \omega^{2/3}}{2} = \mathrm{Re}\,\omega^{2/3}$$

と表される。ただし、$\omega^{1/3}, \omega^{4/3}, \omega^{2/3}$ はいずれも主値をとるものとする。
（表計算ソフトウェアのExcelでは、IMPOWER関数で計算できる）

10°, 50°, 70° の値

3次方程式 $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ の3つの実数解

$$x_1 = \mathrm{Re}\,\omega^{1/3} = 0.766044\ldots$$

$$x_2 = \mathrm{Re}\,\omega^{4/3} = 0.939693\ldots$$

$$x_3 = \mathrm{Re}\,\omega^{2/3} = 0.173648\ldots$$

のうち、$x_3 = \sin\frac{30°}{3} = \sin 10°$ であり、$x_1 = \sin\frac{150°}{3} = \sin 50°$,

$x_2 = \sin\frac{-210°}{3} = \sin(-70°) = -\sin 70°$ である。

$$\sin 30° = \sin 150° = \sin(-210°) = \frac{1}{2}$$

$20°, 40°, 80°$ の値

また、それぞれの虚部は

$$\mathrm{Im}\,\omega^{1/3} = \cos 50°, \quad \mathrm{Im}\,\omega^{4/3} = \cos(-70°), \quad \mathrm{Im}\,\omega^{2/3} = \cos 10°$$

だから

$$\sin 40° = \sin(90° - 50°) = \cos 50° = \mathrm{Im}\,\omega^{1/3} = 0.642788 \ldots$$

$$\begin{aligned} \sin 20° = \sin(90° - 70°) &= \cos 70° \\ &= \cos(-70°) = \mathrm{Im}\,\omega^{4/3} = 0.342020 \ldots \end{aligned}$$

$$\sin 80° = \sin(90° - 10°) = \cos 10° = \mathrm{Im}\,\omega^{2/3} = 0.984808 \ldots$$

となる。

結果

角度 θ	$\sin\theta$	
	厳密値	近似値
$0°$	0	0
$10°$	$\mathrm{Re}\,\omega^{2/3}$	0.173648
$20°$	$\mathrm{Im}\,\omega^{4/3}$	0.342020
$30°$	$1/2$	0.5
$40°$	$\mathrm{Im}\,\omega^{1/3}$	0.642788
$50°$	$\mathrm{Re}\,\omega^{1/3}$	0.766044
$60°$	$\sqrt{3}/2$	0.866025
$70°$	$\mathrm{Re}\,\omega^{4/3}$	0.939693
$80°$	$\mathrm{Im}\,\omega^{2/3}$	0.984808
$90°$	1	1

付録:3倍角の公式

ド・モアブルの公式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + i3\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

だから

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

付録:カルダノの方法

$$
\begin{aligned}
&(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)\\
&=X^3+Y^3+Z^3+X(Y^2+Z^2)+Y(X^2+Z^2)+Z(X^2+Y^2)\\
&\qquad -X(XY+YZ+ZX)-Y(XY+YZ+ZX)-Z(XY+YZ+ZX)\\
&=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ
\end{aligned}
$$

である。さらに、1 の3乗根 ω に対して $\omega\bar{\omega}=1, \omega+\bar{\omega}=-1$ より

$$
\begin{aligned}
&(X+\omega Y+\bar{\omega}Z)(X+\bar{\omega}Y+\omega Z)\\
&=X^2+Y^2+Z^2+(\omega+\bar{\omega})(XY+ZX)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)YZ\\
&=X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX
\end{aligned}
$$

だから

$$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X+\omega Y+\bar{\omega}Z)(X+\bar{\omega}Y+\omega Z)$$

付録:カルダノの方法

$$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X+\omega Y+\bar{\omega}Z)(X+\bar{\omega}Y+\omega Z)$$

において、$X=x, Y=-u, Z=-v$ とすると

$$\begin{aligned} x^3-u^3-v^3-3uvx &= x^3-3uvx-(u^3+v^3) \\ &= (x-u-v)(x-\omega u-\bar{\omega}v)(x-\bar{\omega}u-\omega v) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、x の3次方程式

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0$$

の解は $x=u+v,\ \ \omega u+\bar{\omega}v,\ \ \bar{\omega}u+\omega v$ である。