

ホール効果の古典論

渡邊 俊夫

原理

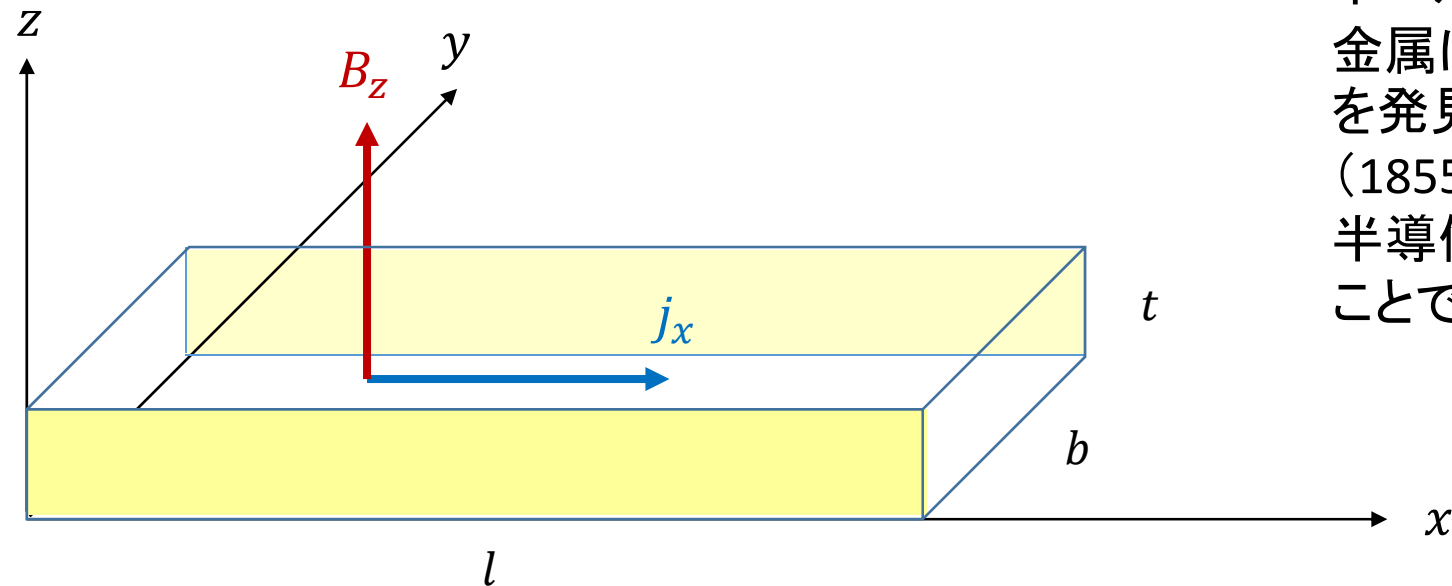
形状が直方体の半導体の各辺の方向を x 軸、 y 軸、 z 軸にとる。

x 軸方向に電場 E_x を印加すると、 x 軸方向に電流密度 j_x の電流が流れる。

さらに、 z 軸方向に磁束密度 B_z の磁場を印加すると、電流のキャリアは y 軸方向のローレンツ力 $f = j \times B$ を受ける。

その結果、 y 軸に垂直な端面に電荷が蓄積され、 y 軸方向に電場 E_y が発生する。

これを**ホール効果** (Hall effect) という。



ホール効果は1879年に金属についてこの現象を発見したE. W. Hall (1855-1938)に因む。半導体の正孔(hole)のことではない。

運動方程式

半導体中のキャリア(電子と正孔)のふるまいを古典論で考える。

電流の担い手であるキャリアは、半導体中で速度に比例する抵抗力を受ける。
その緩和時間を τ とすると、キャリア(質量 m 、電荷 q)の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m \frac{\mathbf{v}}{\tau} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

であり、定常状態($d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$)では

$$\mathbf{v} = \frac{q\tau}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \pm\mu(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

複号は $q > 0$ のとき +、
 $q < 0$ のとき - である。

になる。これを満たす $\mathbf{v}$ をドリフト速度という。

ここで、 $\mu = \frac{|q|\tau}{m}$ はキャリアの移動度である。

移動度(mobility)は、
易動度と表記される
こともある。

ドリフト速度：電子

電子(電荷 $-e$ 、移動度 μ_e) のドリフト速度は

$$\mathbf{v}_e = -\mu_e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) = -\mu_e \begin{pmatrix} E_x + v_{ey}B_z \\ E_y - v_{ex}B_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_e B_z \\ -\mu_e B_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \end{pmatrix} = -\mu_e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

だから

$$v_{ex} = -\mu_e \frac{E_x - \mu_e B_z E_y}{1 + \mu_e^2 B_z^2}, \quad v_{ey} = -\mu_e \frac{E_y + \mu_e B_z E_x}{1 + \mu_e^2 B_z^2}$$

ドリフト速度: 正孔

正孔(電荷 $+e$ 、移動度 μ_h) のドリフト速度は

$$\mathbf{v}_h = \mu_h (\mathbf{E} + \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}) = \mu_h \begin{pmatrix} E_x + v_{hy} B_z \\ E_y - v_{hx} B_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{hx} \\ v_{hy} \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu_h B_z \\ \mu_h B_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{hx} \\ v_{hy} \end{pmatrix} = \mu_h \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

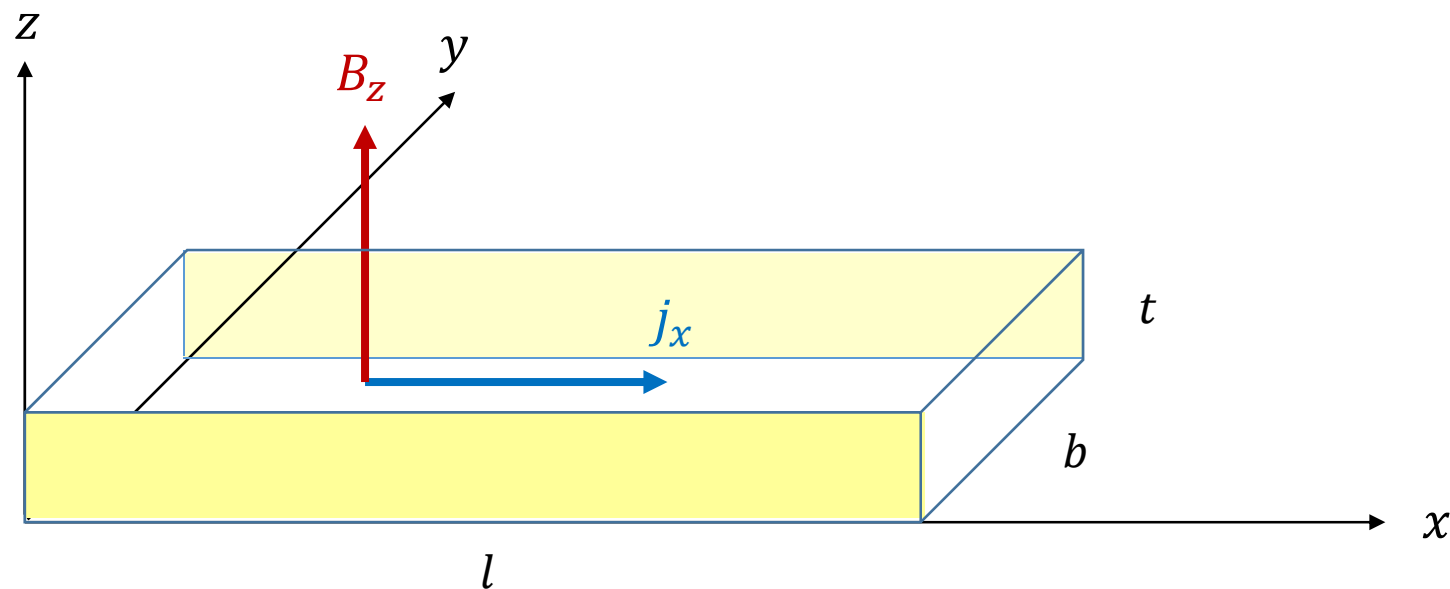
だから

$$v_{hx} = \mu_h \frac{E_x + \mu_h B_z E_y}{1 + \mu_h^2 B_z^2}, \quad v_{hy} = \mu_h \frac{E_y - \mu_h B_z E_x}{1 + \mu_h^2 B_z^2}$$

電流密度: x 軸方向

x 軸方向の電流密度 j_x は、電子密度を n 、正孔密度を p とすると

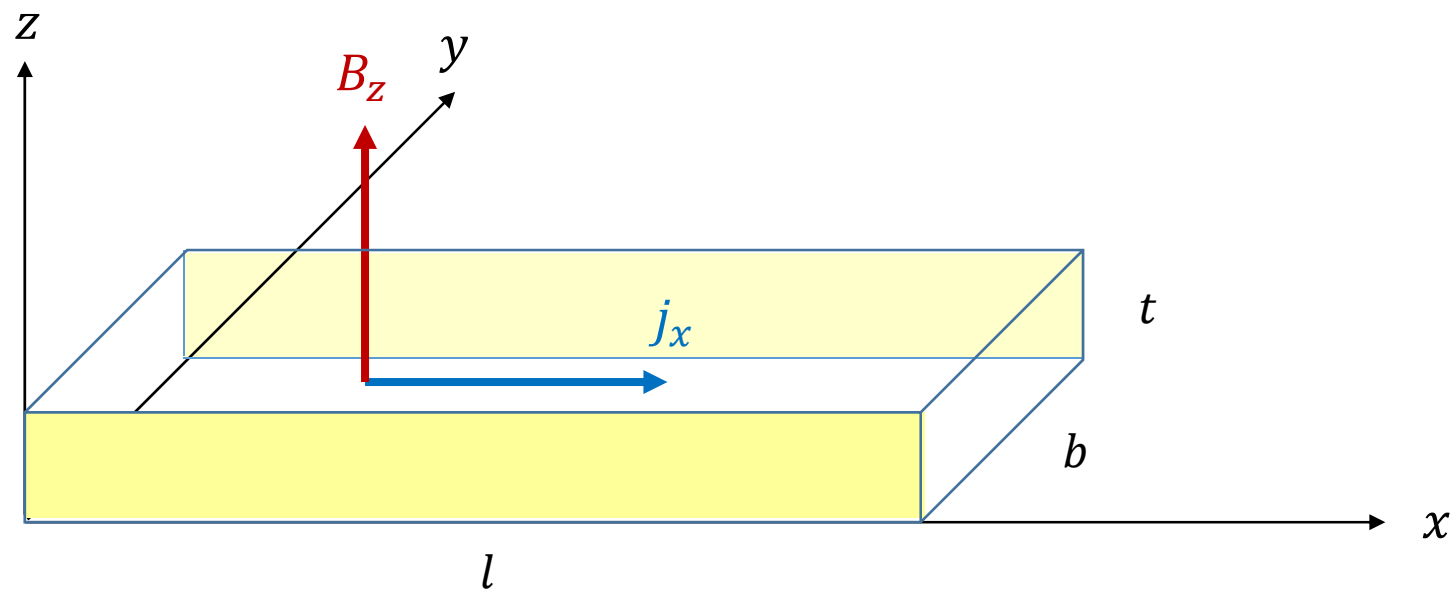
$$\begin{aligned} j_x &= j_{ex} + j_{hx} = -nev_{ex} + pev_{hx} = ne\mu_e \frac{E_x - \mu_e B_z E_y}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + pe\mu_h \frac{E_x + \mu_h B_z E_y}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \\ &= \left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) E_x + \left(-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) B_z E_y \end{aligned}$$



電流密度: y 軸方向

y 軸方向の電流密度 j_y は

$$\begin{aligned} j_y &= j_{ey} + j_{hy} = -nev_{ey} + pev_{hy} = ne\mu_e \frac{E_y + \mu_e B_z E_x}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + pe\mu_h \frac{E_y - \mu_h B_z E_x}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \\ &= \left(\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} - \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) B_z E_x + \left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) E_y \end{aligned}$$



電流密度

$$j_x = \left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) E_x + \left(-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) B_z E_y$$

$$j_y = \left(\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} - \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) B_z E_x + \left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) E_y$$

ここで、

$$\sigma = \frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2}, \quad \gamma = -\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2}$$

とおくと

$$j_x = \sigma E_x + \gamma B_z E_y$$

$$j_y = -\gamma B_z E_x + \sigma E_y$$

ホール電場

$$j_x = \sigma E_x + \gamma B_z E_y$$

$$j_y = -\gamma B_z E_x + \sigma E_y$$

定常状態では、磁場(磁束密度 B_z)と電場 E_y からキャリアが y 軸方向に受ける力が釣り合って $j_y = 0$ となるから

$$0 = -\gamma B_z \frac{j_x - \gamma B_z E_y}{\sigma} + \sigma E_y$$

$$0 = -\gamma B_z j_x + \gamma^2 B_z^2 E_y + \sigma^2 E_y = -\gamma B_z j_x + (\sigma^2 + \gamma^2 B_z^2) E_y$$

$$\therefore E_y = \frac{\gamma B_z j_x}{\sigma^2 + \gamma^2 B_z^2}$$

これを**ホール電場**という。

ホール係数

ホール電場

$$E_y = \frac{\gamma B_z j_x}{\sigma^2 + \gamma^2 B_z^2}$$

は電流密度 j_x と磁束密度 B_z に比例する。その比例係数を**ホール係数**といい、次式で表される。

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{\gamma}{\sigma^2 + \gamma^2 B_z^2}$$
$$= \frac{-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2}}{\left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2}\right)^2 + \left(-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2}\right)^2} B_z^2$$

ホール係数：弱磁場

弱磁場では、 $\sigma \gg \gamma B_z$ および $1 \gg \mu_e B_z, 1 \gg \mu_h B_z$ だから

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{\gamma}{\sigma^2 + \gamma^2 B_z^2} \cong \frac{\gamma}{\sigma^2} \\ &= \frac{-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2}}{\left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2}\right)^2} \cong \frac{-ne\mu_e^2 + pe\mu_h^2}{(ne\mu_e + pe\mu_h)^2} = \frac{-n\mu_e^2 + p\mu_h^2}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2} \end{aligned}$$

ホール係数：強磁場

強磁場では、 $\sigma \ll \gamma B_z$ および $1 \ll \mu_e B_z, 1 \ll \mu_h B_z$ だから

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{\gamma}{\sigma^2 + \gamma^2 B_z^2} \cong \frac{1}{\gamma B_z^2} \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) B_z^2} \cong \frac{1}{\left(-\frac{ne\mu_e^2}{\mu_e^2 B_z^2} + \frac{pe\mu_h^2}{\mu_h^2 B_z^2} \right) B_z^2} \\ &= \frac{1}{-ne + pe} = -\frac{1}{(n - p)e} \end{aligned}$$

ホール係数：単一キャリア

キャリアが電子のみで $p = 0$ のときは

$$R_H = \frac{-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2}}{\left(\frac{ne\mu_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2}\right)^2 + \left(-\frac{ne\mu_e^2}{1 + \mu_e^2 B_z^2}\right)^2 B_z^2} = -\frac{1}{ne}$$

キャリアが正孔のみで $n = 0$ のときは

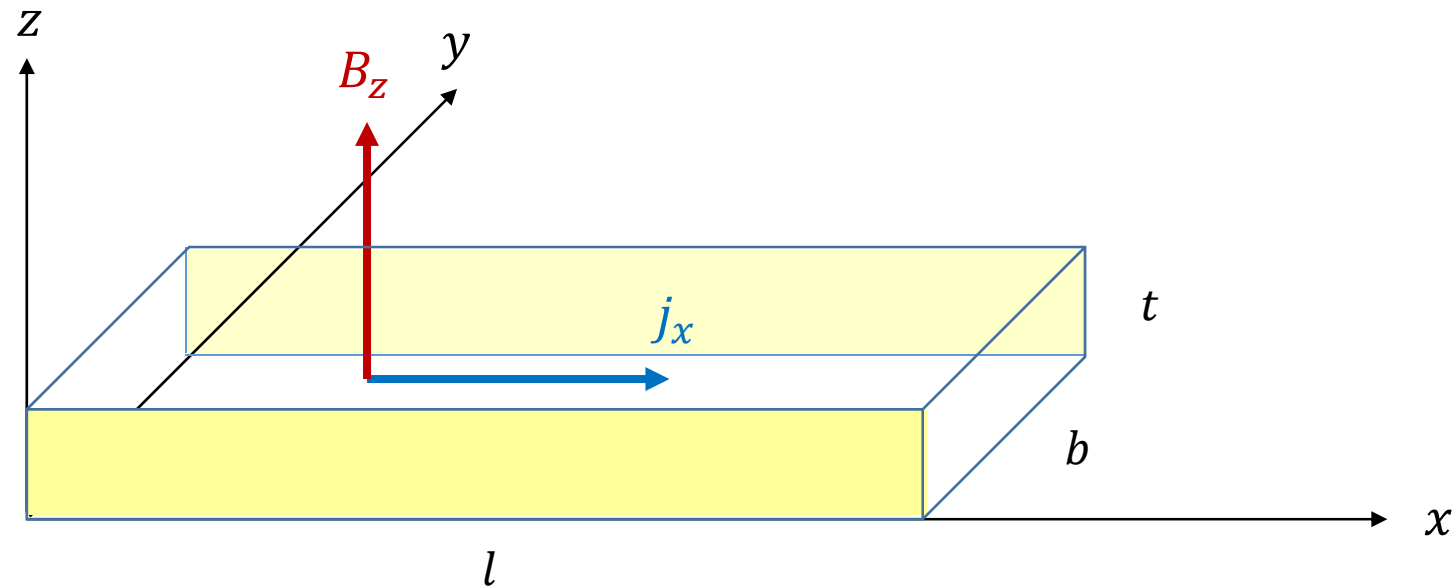
$$R_H = \frac{\frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2}}{\left(\frac{pe\mu_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2}\right)^2 + \left(\frac{pe\mu_h^2}{1 + \mu_h^2 B_z^2}\right)^2 B_z^2} = \frac{1}{pe}$$

まとめ

電子と正孔をキャリアとする半導体に電流密度 j_x の電流が流れているとき、電流と直交する方向に磁束密度 B_z の磁場を印加すると、電流にも磁場に垂直な方向に電場 E_y が発生する。それらの大きさの比 $R_H = E_y/(j_x B_z)$ は、次式で表される。

$$R_H = \frac{-n\mu_e^2 + p\mu_h^2}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2} \quad (\text{弱磁場}), \quad R_H = -\frac{1}{(n-p)e} \quad (\text{強磁場})$$

ここで、 n, p は電子と正孔の密度、 μ_e, μ_h は電子と正孔の移動度である。



参考文献

- 高橋清「半導体工学 半導体物性の基礎」(森北電気工学シリーズ 4)、森北出版、1975.
- 花村榮一「基礎演習シリーズ 固体物理学」裳華房、1986.