

ゼータ×ガンマ

—物理における $\zeta(s)\Gamma(s)$ —

渡邊 俊夫

ゼータ関数

ゼータ関数 $\zeta(s)$ は次式で定義される。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

s が正の偶数のとき、 $\zeta(s)$ は次の値になる。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934 \dots, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.082323 \dots, \quad \dots$$

また、 s が正の奇数のとき、 $\zeta(s)$ は次の値になる。

$$\zeta(3) = 1.20205 \dots, \quad \zeta(5) = 1.03692 \dots, \quad \dots$$

ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は次式で定義される。

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

ガンマ関数に対して

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

が成り立ち、

$$\Gamma(1) = 1$$

であるから、正の整数 n に対して

$$\Gamma(n+1) = n!$$

となる。

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} t^s e^{-t} dt \\ &= [-t^s e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} s t^{s-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + s \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = s\Gamma(s)\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

ゼータ関数とガンマ関数の積

ゼータ関数 $\zeta(s)$ とガンマ関数 $\Gamma(s)$ の積に対して

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^{s-1} e^{-t} \frac{1}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx\end{aligned}$$

となるから

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(s)\Gamma(s)$$

が成り立つ。本稿では、物理学において、この定積分が現れる例について述べる。

黒体輻射：モード密度

1辺の長さが L の立方体の空洞中の電磁波(光子)について、固有モードの波数の各辺方向の成分 k_i ($i = x, y, z$) は、 n_i を正の整数として $k_i = \pi n_i / L$ である。このとき、波長 λ 、周波数 ν と真空中の光速 c の関係 $\lambda \nu = c$ を用いて

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2$$

と表される。周波数が ν 以下の固有モードの総数は、偏光方向が2つあることを考慮して

$$N_m = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{4\pi}{3} q^3 \times \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\pi(2\pi\nu/c)^3}{3(\pi/L)^3} = \frac{8\pi\nu^3 L^3}{3c^3}$$

であるから、周波数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の範囲に含まれるモード密度は、単位体積あたり

$$g(\nu) = \frac{1}{L^3} \frac{dN_m}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

となる。

黒体輻射：エネルギー密度

光子のエネルギー ϵ は、プランク定数 h を用いて $\epsilon = h\nu$ と表される。光子はボース-アインシュタイン分布にしたがうから、絶対温度 T の物体からの熱輻射のエネルギー密度は、ボルツマン定数 k を用いて

$$u(\nu, T) = g(\nu) \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

となる。その総和は

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{(h\nu/kT)^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{h}{kT} d\nu$$

で求められる。ここで、 $x = h\nu/kT$ とおくと

$$\begin{aligned} u(T) &= \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \zeta(4) \Gamma(4) = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot 3! \\ &= \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4 \end{aligned}$$

黒体輻射：放射発散度

熱輻射のエネルギー密度は

$$u(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4$$

であり、 T^4 に比例する。これより、放射発散度も T^4 に比例し、

$$I(T) = \frac{c}{4} u(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$$

となる。ここで、

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.670374 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$$

をシュテファン-ボルツマン定数という。

放射発散度は、単位表面積あたり単位時間に放射されるエネルギーであり、

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} u(T) c \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{c}{4} u(T) \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta \\ &= \frac{c}{4} u(T) \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{c}{4} u(T) \end{aligned}$$

で表される。

$$k = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

はいずれもSI(国際単位系)の定義値である。

固体の比熱: モード密度

1辺の長さが L の立方体の固体中の格子振動(フォノン)について、固有モードの波数 q の各辺方向の成分 q_i ($i = x, y, z$) は、 n_i を正の整数として $q_i = \pi n_i / L$ である。このとき、波長 λ 、周波数 ν と音速 c との関係 $\lambda \nu = c$ を用いて

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = q^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2$$

3つの振動方向のうち
1つは縦波、2つは横波である。
縦波と横波で音速は異なるが、
(適切な)平均値を c とする。

と表される。周波数が ν 以下のモードの総数は、振動方向が3つあることを考慮して

$$N_m = 3 \times \frac{1}{8} \times \frac{4\pi}{3} q^3 \times \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\pi(2\pi\nu/c)^3}{2(\pi/L)^3} = \frac{4\pi\nu^3 L^3}{c^3}$$

である。ここで、周波数の最大値を ν_m とすると、単位体積あたりの原子数を N として、 $3N = 4\pi\nu_m^3 / c^3$ となる。したがって、周波数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の範囲に含まれる単位体積あたりのモード密度は、次式で表される。

$$g(\nu) = \frac{1}{L^3} \frac{dN_m}{d\nu} = \frac{12\pi\nu^2}{c^3} = \frac{9N\nu^2}{\nu_m^3}$$

固体の比熱: エネルギー密度

フォノンのエネルギー ϵ は、プランク定数 h を用いて $\epsilon = h\nu$ と表される。フォノンはボース-アインシュタイン分布にしたがうから、絶対温度 T の固体の熱エネルギー密度は、ボルツマン定数 k を用いて

$$u(\nu, T) = g(\nu) \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{9N\nu^2}{\nu_m^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

となる。その総和は

$$u(T) = \int_0^{\nu_m} u(\nu, T) d\nu = \frac{9N}{\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \frac{\hbar\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{9Nk^4T^4}{h^3\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \frac{(h\nu/kT)^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{h}{kT} d\nu$$

で求められる。ここで、 $x = h\nu/kT$ とおくと

$$u(T) = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

と表される。ただし、 $\Theta = h\nu_m/k$ であり、これをデ바이温度という。

固体の比熱: 高温

固体の熱エネルギー密度

$$u(T) = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

は、高温では $x = h\nu/kT \ll 1$ より $e^x - 1 \cong x$ と近似して

$$u(T) \cong \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} x^2 dx = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\Theta/T} = 3NkT$$

となる。したがって、高温における固体の比熱は

$$\frac{du(T)}{dT} = 3Nk$$

となる。1モルあたりで考えると、アボガドロ数を N_A 、気体定数を R として $N_A k = R$ だから、固体の定積モル比熱は $C_V = 3N_A k = 3R$ となる。これをデュロン-プティの法則という。

固体の比熱: 低温

固体の熱エネルギー密度

$$u(T) = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

は、低温では $\Theta/T \rightarrow \infty$ と近似して

$$\begin{aligned} u(T) &\cong \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot 3! \\ &= \frac{3\pi^4 NkT^4}{5\Theta^3} \end{aligned}$$

となる。したがって、低温における固体の比熱は

$$\frac{du(T)}{dT} = \frac{12\pi^4}{5} Nk \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 = \frac{12\pi^4 Nk^4 T^3}{5h^3 \nu_m^3} = \frac{12\pi^4 Nk^4 T^3}{5h^3} \frac{4\pi}{3Nc^3} = \frac{16\pi^5 k^4}{5h^3 c^3} T^3$$

となり、 T^3 に比例する。

金属の抵抗率

物質の抵抗率 ρ は電気伝導度 σ の逆数であり、電子密度を n 、電子の電荷を $-e$ 、有効質量を m 、緩和時間を τ として

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau}$$

と表される。1価金属の場合、フェルミ温度 $T_F = E_F/k$ (E_F は電子のフェルミエネルギー) より十分低い温度において、電子とフォノンの相互作用による緩和時間 τ を考えると、抵抗率は次式により求められる。

$$\rho = \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5}{(1 - e^{-x})(e^x - 1)} dx$$

これをブロッホ-グリュナイゼンの式という。ここで、 M は原子(イオン)の質量、 $\hbar = h/2\pi$ 、 $\Theta = \hbar c q_D/k$ であり、 q_D はフォノンの波数 q の最大値で、縦波のみを考えると $q_D^3 = 6\pi^2 n$ である。

金属の抵抗率: 高温

1価金属の抵抗率

$$\rho = \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5}{(1 - e^{-x})(e^x - 1)} dx$$

は、高温では $x = \hbar c q / kT \ll 1$ より $1 - e^{-x} \cong x$, $e^x - 1 \cong x$ と近似して

$$\rho \cong \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\Theta/T} x^3 dx = \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{\Theta/T} = \frac{\pi m^2 E_F^2 T}{3\hbar M n e^2 k \Theta^2}$$

$$\Theta = \hbar c q_D / k$$

$$q_D^3 = 6\pi^2 n$$

$$= \frac{\pi m^2 E_F^2 T}{3\hbar M n e^2 k (\hbar c q_D / k)^2} = \frac{\pi m^2 E_F^2 k T}{3\hbar^3 c^2 M n e^2 q_D^2} = \frac{\pi m^2 E_F^2 q_D k T}{3\hbar^3 c^2 M n e^2 \cdot 6\pi^2 n}$$

$$= \frac{m^2 E_F^2 q_D k T}{18\pi \hbar^3 c^2 M n^2 e^2} = \frac{\hbar k_F^4 q_D k T}{72\pi c^2 M n^2 e^2}$$

$$k_F \text{ はフェルミ波数で } E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

となり、温度 T に比例する。

金属の抵抗率: 低温

1価金属の抵抗率

$$\rho = \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5}{(1 - e^{-x})(e^x - 1)} dx$$

は、低温では $\Theta/T \rightarrow \infty$ と近似して

$$\begin{aligned} \rho &\cong \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\infty} \frac{x^5}{(1 - e^{-x})(e^x - 1)} dx = \frac{4\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\infty} \frac{x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \\ &= \frac{20\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^{\infty} \frac{x^4}{e^x - 1} dx = \frac{20\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \zeta(5)\Gamma(5) \\ &= \frac{20\pi \cdot 4! \zeta(5) m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} = \frac{160\pi \zeta(5) m^2 E_F^2 T^5}{\hbar M n e^2 k \Theta^6} \end{aligned}$$

となり、 T^5 に比例する。

金属の抵抗率: 低温

低温における1価金属の抵抗率は

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{160\pi\zeta(5)m^2E_F^2T^5}{\hbar Mne^2k\Theta^6} = \frac{160\pi\zeta(5)m^2E_F^2T^5}{\hbar Mne^2k(\hbar cq_D/k)^6} \\ &= \frac{160\pi\zeta(5)m^2E_F^2k^5T^5}{\hbar^7c^6Mne^2q_D^6} = \frac{160\pi\zeta(5)m^2E_F^2k^5T^5}{\hbar^7c^6Mne^2(6\pi^2n)^2} \\ &= \frac{40\zeta(5)m^2E_F^2k^5T^5}{9\pi^3\hbar^7c^6Mn^3e^2} = \frac{10\zeta(5)k_F^4k^5T^5}{9\pi^3\hbar^3c^6Mn^3e^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta &= \hbar cq_D/k \\ q_D^3 &= 6\pi^2n\end{aligned}$$

$$k_F \text{ はフェルミ波数で } E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

と表すこともできる。

まとめ

ボース-アインシュタイン分布にしたがう粒子の統計に関する定積分の計算に、ゼータ関数 $\zeta(s)$ とガンマ関数 $\Gamma(s)$ の積が現れる例として、以下のものがある。

黒体の熱輻射のエネルギー密度

$$u(T) = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4$$

低温における固体の熱エネルギー密度

$$u(T) \cong \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{9NkT^4}{\Theta^3} \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{3\pi^4 NkT^4}{5\Theta^3}$$

低温における1価金属の抵抗率

$$\rho \cong \frac{20\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \int_0^\infty \frac{x^4}{e^x - 1} dx = \frac{20\pi m^2 E_F^2 T^5}{3\hbar M n e^2 k \Theta^6} \zeta(5)\Gamma(5) = \frac{160\pi \zeta(5) m^2 E_F^2 T^5}{\hbar M n e^2 k \Theta^6}$$

参考文献

- 霜田光一「レーザー物理入門」岩波書店、1983.
- 黒沢達美「物性論－固体を中心とした－」(基礎物理学選書 9)、裳華房、1973.
- 花村榮一「基礎演習シリーズ 固体物理学」裳華房、1986.
- 阿部龍蔵「電気伝導」(新物理学シリーズ 8)、培風館、1969.