i! (iの階乗)

渡邉 俊夫

iの階乗

ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}$$

は正の整数 n に対して

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

を与え、階乗の定義域を複素数まで拡張したものになっている。

これを用いると、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ の階乗は

$$i! = \Gamma(i+1) = i\Gamma(i)$$

と表される。

i!の絶対値

ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

においてz = iとすると、左辺は

$$\Gamma(i)\Gamma(1-i) = \Gamma(i) \cdot (-i)\Gamma(-i) = -i\Gamma(i)\Gamma(-i) = -i\Gamma(i)\Gamma(\bar{\imath})$$
$$= -i\Gamma(i)\overline{\Gamma(i)} = -i|\Gamma(i)|^{2}$$

となるから

$$-i|\Gamma(i)|^2 = \Gamma(i)\Gamma(1-i) = \frac{\pi}{\sin i\pi}$$

i!の絶対値

$$-i|\Gamma(i)|^2 = \frac{\pi}{\sin i\pi}$$

より

$$|\Gamma(i)|^{2} = \frac{\pi}{-i\sin i\pi} = \frac{\pi}{-i\frac{e^{i\cdot i\pi} - e^{-i\cdot i\pi}}{2i}} = \frac{\pi}{-\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}} = \frac{\pi}{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{\sinh \pi}$$

ゆえに、 $i! = \Gamma(i+1) = i\Gamma(i)$ の絶対値は

$$|i!| = |i\Gamma(i)| = |i||\Gamma(i)| = |\Gamma(i)| = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh \pi}} = 0.521564047$$

i!の偏角

ガンマ関数の乗積表示

$$\Gamma(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)} = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z \prod_{k=1}^m k}{z \prod_{k=1}^m (z+k)} = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z}{z \prod_{k=1}^m \frac{z+k}{k}}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{e^{z \log m}}{z \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{k}\right)}$$

においてz = iとすると、

$$\Gamma(i) = \lim_{m \to \infty} \frac{e^{i \log m}}{i \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{i}{k}\right)}$$

i!の偏角

$$\Gamma(i) = \lim_{m \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{i \log m}}{i \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{i}{k}\right)}$$
より、 $i! = \Gamma(i+1) = i\Gamma(i)$ の偏角の主値は

$$\operatorname{Arg}(i!) = \operatorname{Arg}[i\Gamma(i)] = \operatorname{Arg}\left(\lim_{m \to \infty} \frac{e^{i \log m}}{\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{i}{k}\right)}\right)$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left(\operatorname{Arg} \frac{e^{i \log m}}{\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{i}{k} \right)} \right) = \lim_{m \to \infty} \left(\log m - \sum_{k=1}^{m} \tan^{-1} \frac{1}{k} \right)$$

$$=-0.30164032$$

i!の値

$$|i!| = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh \pi}} = 0.521564047$$

$$Arg(i!) = \lim_{m \to \infty} \left(\log m - \sum_{k=1}^{m} \tan^{-1} \frac{1}{k} \right) = -0.30164032$$

より、

 $i! = 0.521564047e^{-i0.30164032}$

 $= 0.521564047 \cdot [\cos(0.30164032) - i\sin(0.30164032)]$

= 0.498015668 - i0.154949828

を得る。

スターリングの近似

正の整数 n の階乗 n! に対して、 $n \gg 1$ のとき、スターリングの近似 $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$

が成り立つ。これが複素数々に対しても成り立つとして計算すると

$$i! \approx \sqrt{2\pi i} \cdot i^i e^{-i} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi/2} \cdot (\cos 1 - i \sin 1)$$

 $= \sqrt{\pi} e^{-\pi/2} [(\cos 1 + \sin 1) + i(\cos 1 - \sin 1)]$

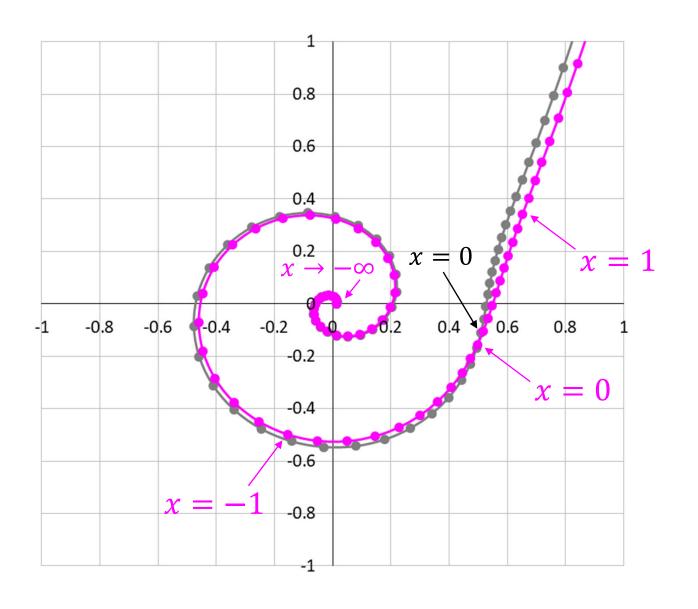
= 0.509123980 - i0.110967695

となる。近似の精度はあまり良くないことがわかる。

(x+i)!の軌跡

 $w = (x + i)! = \Gamma(1 + x + i)$ の値を 0.1 刻みで計算して 複素平面に表示したものを 右図に示す。x = 0 のときが $i! = \Gamma(i + 1)$ である。

図中の灰色のプロットは、 スターリングの近似による 計算結果である。x = 0 の 点の位置がずれていること に注意。

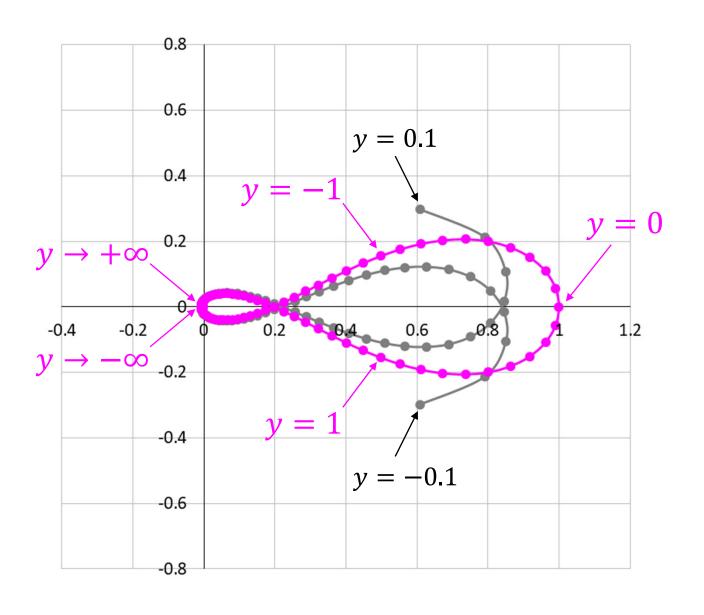


Kagoshima University wata104@eee

(iy)!の軌跡

 $w = (iy)! = \Gamma(1 + iy)$ の値を 0.1 刻みで計算して複素平面に表示したものを右図に示す。y = 1 のときが $i! = \Gamma(i + 1)$ である。

図中の灰色のプロットは、スターリングの近似による計算結果である。y = 0では 0^0 が定まらないので、値が求められないことに注意。



Kagoshima University wata104@eee

ガンマ関数の積分表示より

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{m \to \infty} \int_0^m t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{m} \right)^m dt$$

t = muと変数変換すると、dt = mdu だから

$$\int_{0}^{m} t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m} dt = \int_{0}^{1} (mu)^{z-1} (1 - u)^{m} m dt$$
$$= m^{z} \int_{0}^{1} u^{z-1} (1 - u)^{m} dt$$

t = muと変数変換すると

$$\int_{0}^{m} t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m} dt = m^{z} \int_{0}^{1} u^{z-1} (1 - u)^{m} dt$$

$$= m^{z} \left(\left[\frac{u^{z}}{z} (1 - u)^{m}\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \frac{u^{z}}{z} m (1 - u)^{m-1} dt\right)$$

$$= m^{z} \frac{m}{z} \int_{0}^{1} u^{z} (1 - u)^{m-1} dt$$

$$= \cdots$$

$$= m^{z} \frac{m}{z} \cdot \frac{m-1}{z} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{z+m-1} \int_{0}^{1} u^{z+m-1} dt$$

Kagoshima University

wata104@eee

$$\int_{0}^{m} t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m} dt = m^{z} \int_{0}^{1} u^{z-1} (1 - u)^{m} dt$$

$$= m^{z} \frac{m}{z} \cdot \frac{m-1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z+m-1} \int_{0}^{1} u^{z+m-1} dt$$

$$= m^{z} \frac{m}{z} \cdot \frac{m-1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z+m-1} \left[\frac{u^{z+m}}{z+m} \right]_{0}^{1}$$

$$= m^{z} \frac{m}{z} \cdot \frac{m-1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z+m-1} \cdot \frac{1}{z+m}$$

$$= \frac{m^{z} m!}{\prod_{k=0}^{m} (z+k)}$$

ガンマ関数の積分表示より

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{m \to \infty} \int_0^m t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{m} \right)^m dt$$

t = muと変数変換すると

$$\int_{0}^{m} t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{m} \right)^{m} dt = \frac{m^{z} m!}{\prod_{k=0}^{m} (z+k)}$$

だから

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}$$

となり、ガンマ関数の乗積表示を得る。

階乗の乗積表示

正の整数nに対して、 $m \gg n$ となるmを用いて

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot m(m+1) \cdot \dots \cdot (m+n)}{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot m(m+1) \cdot \dots \cdot (m+n)}$$

$$\approx \frac{m! \, m^n}{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+m)} = \frac{m! \, m^n}{\prod_{k=0}^{m} (n+k)}$$

これが正の整数 n だけでなく、任意の実数 x、さらには複素数 z に対しても成り立つとすると

$$z! = \lim_{m \to \infty} \frac{m! \, m^z}{\prod_k^m (z+k)}$$

ガンマ関数の相反公式

ガンマ関数の乗積表示
$$\Gamma(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}$$
 より
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z) \cdot (-z)\Gamma(-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z)$$

$$= -z \left(\lim_{m \to \infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}\right) \left(\lim_{m \to \infty} \frac{m^{-z} m!}{\prod_{k=0}^m (-z+k)}\right)$$

$$= -z \left(\lim_{m \to \infty} \frac{\prod_{k=1}^m k}{z \prod_{k=1}^m (z+k)}\right) \left(\lim_{m \to \infty} \frac{\prod_{k=1}^m k}{-z \prod_{k=1}^m (-z+k)}\right)$$

$$= \frac{1}{z} \prod_{k=1}^\infty \frac{k}{z+k} \cdot \prod_{k=1}^\infty \frac{k}{-z+k} = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^\infty \frac{k^2}{k^2-z^2}$$

ガンマ関数の相反公式

ガンマ関数の乗積表示より

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - z^2}$$

ここで、正弦関数の乗積表示

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - z^2}{k^2}$$

を用いると

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

を得る。これをガンマ関数の相反公式という。

正弦関数の乗積表示

 $\sin \pi z = 0$ の解は $z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ だから、A を定数として

$$\sin \pi z = Az \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right)$$

と展開(因数分解)できる。ここで、

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

だから、 $A = \pi$ である。ゆえに、

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right)$$

となり、正弦関数の乗積表示を得る。

余談:自然数の逆数の2乗和

正弦関数の乗積表示の左辺をマクローリン展開すると

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \cdots$$

いっぽう、右辺は

$$\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right) = \pi z \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2} + \cdots \right)$$

となるから、z3の係数を比較すると

$$-\frac{\pi^3}{3!} = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

スターリングの近似

ガンマ関数の積分表示より

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t+n\log t} dt$$

ここで、 $f(t) = t - n \log t$ とおき、

$$f'(t) = 1 - \frac{n}{t}$$
, $f''(t) = \frac{n}{t^2}$, $f'''(t) = -\frac{2n}{t^3}$

より、f(t) を t=n でテイラー展開すると

$$f(t) = f(n) + \frac{1}{2n}(t-n)^2 - \frac{1}{3n^2}(t-n)^3 + \cdots$$

スターリングの近似

ガンマ関数の積分表示より

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t+n\log t} dt = \int_0^\infty e^{-f(t)} dt$$

f(t) を t = n でテイラー展開すると

$$f(t) = f(n) + \frac{1}{2n}(t-n)^2 - \frac{1}{3n^2}(t-n)^3 + \cdots$$

 $e^{-f(t)}$ は t=n の付近でのみ大きな値をもつから、 $n\gg 1$ に対して

$$n! = \int_0^\infty e^{-f(t)} dt \approx e^{-f(n)} \int_{-\infty}^\infty e^{-(t-n)^2/2n} dt = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

を得る。

参考文献: 小野寺嘉孝「物理のための応用数学」裳華房、1988