

F分布

渡邊 俊夫

要点

確率変数 X, Y が互いに独立で、 X が自由度 m のカイ2乗分布、 Y が自由度 n のカイ2乗分布にしたがうとき、

$$Z = \frac{X/m}{Y/n}$$

は自由度 (m, n) のF分布

$$f_{m,n}(z) = \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} z^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n}\right)^{-(m+n)/2}$$

にしたがう。

F分布の導出

確率変数 X, Y は互いに独立であるから

$$f(X, Y) = f(X)f(Y) = \frac{X^{(m/2)-1} e^{-X/2}}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} \frac{Y^{(n/2)-1} e^{-Y/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}$$

ここで、

$$z = \frac{X/m}{Y/n}, \quad y = Y$$

と変数変換すると、 $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{m}{n} Y = \frac{m}{n} y$ より $dXdY = \frac{m}{n} y dz dy$ だから

$$f(z, y) = \frac{\left(\frac{m}{n} zy\right)^{(m/2)-1} e^{-mzy/2n}}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} \frac{y^{(n/2)-1} e^{-y/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \frac{m}{n} y$$

F分布の導出

$$\begin{aligned} f(z, y) &= \frac{\left(\frac{m}{n}zy\right)^{(m/2)-1} e^{-mzy/2n}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \frac{y^{(n/2)-1} e^{-y/2} \frac{m}{n}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y \\ &= \frac{(m/n)^{m/2} z^{(m/2)-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} y^{((m+n)/2)-1} e^{-(n+mz)y/2n} \end{aligned}$$

これを y で積分して、 z の確率密度関数 $f_{m,n}(z)$ を求めると

$$\begin{aligned} f_{m,n}(z) &= \int_0^{\infty} f(z, y) dy \\ &= \frac{(m/n)^{m/2} z^{(m/2)-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} y^{((m+n)/2)-1} e^{-(n+mz)y/2n} dy \end{aligned}$$

F分布の導出

ここで、 $u = \frac{mz + n}{2n}y$ とおくと、 $du = \frac{mz + n}{2n}dy$ だから

$$\begin{aligned} f_{m,n}(z) &= \frac{(m/n)^{m/2} z^{(m/2)-1}}{2^{(m+n)/2} \Gamma(m/2) \Gamma(n/2)} \int_0^\infty y^{((m+n)/2)-1} e^{-(mz+n)y/2n} dy \\ &= \frac{(m/n)^{m/2} z^{(m/2)-1}}{2^{(m+n)/2} \Gamma(m/2) \Gamma(n/2)} \left(\frac{2n}{mz + n} \right)^{\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{(m/n)^{m/2} z^{(m/2)-1}}{\Gamma(m/2) \Gamma(n/2)} \left(\frac{n}{mz + n} \right)^{(m+n)/2} \Gamma((m+n)/2) \\ &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} z^{(m/2)-1} \left(\frac{n}{mz + n} \right)^{(m+n)/2} \end{aligned}$$

F分布の導出

したがって、自由度 (m, n) のF分布の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{m,n}(z) &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} z^{(m/2)-1} \left(\frac{n}{mz + n} \right)^{(m+n)/2} \\ &= \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} z^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n} \right)^{-(m+n)/2} \\ &= \frac{m/n}{B(m/2, n/2)} \left(\frac{mz}{n} \right)^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n} \right)^{-(m+n)/2} \end{aligned}$$

となる。これは、次のように表すこともできる。

$$f_{m,n}(z) = \frac{m^{m/2} n^{n/2}}{B(m/2, n/2)} \frac{z^{(m/2)-1}}{(mz + n)^{(m+n)/2}}$$

F分布: 確率密度関数

$$f_{m,n}(z) = \frac{m/n}{B(m/2, n/2)} \left(\frac{mz}{n}\right)^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n}\right)^{-(m+n)/2}$$

$1 + \frac{mz}{n} = \frac{1}{u}$ とおくと、 $z = \frac{n}{m} \frac{1-u}{u}$ であり、 $dz = -\frac{n}{m} \frac{du}{u^2}$ だから

$$\int_0^\infty f_{m,n}(z) dz = \frac{-1}{B(m/2, n/2)} \int_1^0 \left(\frac{1-u}{u}\right)^{(m/2)-1} u^{(m+n)/2} \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{B(m/2, n/2)} \int_0^1 u^{(n/2)-1} (1-u)^{(m/2)-1} du$$

$$= \frac{1}{B(m/2, n/2)} B(n/2, m/2) = 1$$

$$B(p, q) = B(q, p)$$

F分布: 平均

$$f_{m,n}(z) = \frac{m/n}{B(m/2, n/2)} \left(\frac{mz}{n}\right)^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n}\right)^{-(m+n)/2}$$

$1 + \frac{mz}{n} = \frac{1}{u}$ とおくと、 $z = \frac{n}{m} \frac{1-u}{u}$ であり、 $dz = -\frac{n}{m} \frac{du}{u^2}$ だから、

自由度 (m, n) のF分布にしたがう z の平均は

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \int_0^\infty z f_{m,n}(z) dz = \frac{-1}{B(m/2, n/2)} \int_1^0 \frac{n}{m} \left(\frac{1-u}{u}\right)^{m/2} u^{(m+n)/2} \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{n}{m} \frac{1}{B(m/2, n/2)} \int_0^1 u^{n/2-2} (1-u)^{m/2} du \\ &= \frac{n}{m} \frac{1}{B(m/2, n/2)} B((n/2) - 1, (m/2) + 1)\end{aligned}$$

F分布: 平均

$$B(p, q)\Gamma(p + q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

自由度 (m, n) のF分布にしたがう z の平均は

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \int_0^\infty z f_{m,n}(z) dz = \frac{n}{m} \frac{1}{B(m/2, n/2)} B((n/2) - 1, (m/2) + 1) \\ &= \frac{n}{m} \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma((n/2) - 1)\Gamma((m/2) + 1)}{\Gamma((m+n)/2)} \\ &= \frac{n}{m} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{n}{n-2}\end{aligned}$$

である。ただし、これは $n > 2$ のとき成り立つ。

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) &= \frac{m}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \frac{n-2}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)\end{aligned}$$

F分布: 2乗平均

$$f_{m,n}(z) = \frac{m/n}{B(m/2, n/2)} \left(\frac{mz}{n}\right)^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n}\right)^{-(m+n)/2}$$

$1 + \frac{mz}{n} = \frac{1}{u}$ とおくと、 $z = \frac{n}{m} \frac{1-u}{u}$ であり、 $dz = -\frac{n}{m} \frac{du}{u^2}$ だから、

自由度 (m, n) のF分布にしたがう z の2乗平均は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^2 f_{m,n}(z) dz &= \frac{-1}{B(m/2, n/2)} \int_1^0 \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{1-u}{u}\right)^{(m/2)+1} u^{(m+n)/2} \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{n^2}{m^2} \frac{1}{B(m/2, n/2)} \int_0^1 u^{(n/2)-3} (1-u)^{(m/2)+1} du \\ &= \frac{n^2}{m^2} \frac{1}{B(m/2, n/2)} B((n/2) - 2, (m/2) + 2) \end{aligned}$$

F分布: 2乗平均

$$B(p, q)\Gamma(p + q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

自由度 (m, n) のF分布にしたがう z の2乗平均は

$$\begin{aligned}\overline{z^2} &= \int_0^\infty z^2 f_{m,n}(z) dz = \frac{n^2}{m^2} \frac{1}{B(m/2, n/2)} B((n/2) - 2, (m/2) + 2) \\ &= \frac{n^2}{m^2} \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma((n/2) - 2)\Gamma((m/2) + 2)}{\Gamma((m+n)/2)} \\ &= \frac{n^2}{m^2} \frac{2 \cdot 2}{(n-2)(n-4)} \frac{(m+2)m}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{(m+2)n^2}{m(n-2)(n-4)}\end{aligned}$$

となる。ただし、これは $n > 4$ のとき成り立つ。

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{m}{2} + 2\right) &= \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 2\right)\end{aligned}$$

F分布: 分散

自由度 (m, n) のF分布にしたがう z の分散は、 $n > 4$ のとき

$$\begin{aligned} V(z) &= \overline{z^2} - \bar{z}^2 = \frac{(m+2)n^2}{m(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{n^2}{n-2} \frac{(m+2)(n-2) - m(n-4)}{m(n-2)(n-4)} \\ &= \frac{n^2}{n-2} \frac{2m+2n-4}{m(n-2)(n-4)} \\ &= \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \end{aligned}$$

である。

F分布: 最頻値

自由度 (m, n) のF分布にしたがう z の最頻値は

$$\begin{aligned}\frac{df_{m,n}(z)}{dz} &\propto \frac{d}{dz} \left(z^{(m/2)-1} \left(1 + \frac{mz}{n} \right)^{-(m+n)/2} \right) \\ &= \left(\frac{m}{2} - 1 \right) z^{\frac{m}{2}-2} \left(1 + \frac{mz}{n} \right)^{-\frac{m+n}{2}} - z^{\frac{m}{2}-1} \frac{m+n}{2} \frac{m}{n} \left(1 + \frac{mz}{n} \right)^{-\frac{m+n}{2}-1} \\ &= \frac{z^{\frac{m}{2}-2}}{2n} \left(1 + \frac{mz}{n} \right)^{-\frac{m+n}{2}-1} \{ (m-2)(n+mz) - (m+n)mz \} = 0\end{aligned}$$

より、 $z = \frac{(m-2)n}{m(n+2)}$ である。ただし、 $m = 2$ のときは下限 $z = 0$ で最大

となり、 $m = 1$ のときは $z \rightarrow +0$ で発散する。

確率密度関数 ($m = 1, 2$)

自由度 $m = 1, 2$ に対して、F分布の確率密度関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{1,n}(z) &= \frac{(1/n)^{1/2}}{B(1/2, n/2)} z^{-1/2} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-(n+1)/2} \\ &= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{\sqrt{n\pi z(1+z/n)^{n+1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2,n}(z) &= \frac{2/n}{B(1/2, n/2)} \left(1 + \frac{2z}{n}\right)^{-(n+2)/2} \\ &= \frac{2}{n} \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma(1)\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+2z/n)^{(n+2)/2}} = \frac{1}{(1+2z/n)^{(n/2)+1}} \end{aligned}$$

確率密度関数 ($m = 3$)

自由度 $m = 3$ に対して、F分布の確率密度関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{3,n}(z) &= \frac{(3/n)^{3/2}}{B(3/2, n/2)} z^{1/2} \left(1 + \frac{3z}{n}\right)^{-(n+3)/2} \\ &= \frac{\Gamma((n+3)/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(n/2)} \sqrt{\frac{(3/n)^3 z}{(1 + 3z/n)^{n+3}}} \\ &= \frac{(n+1)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \sqrt{\frac{(3/n)^3 z}{\pi(1 + 3z/n)^{n+3}}} \end{aligned}$$

確率密度関数 ($m = 4$)

自由度 $m = 4$ に対して、F分布の確率密度関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{4,n}(z) &= \frac{(4/n)^2}{B(2, n/2)} z \left(1 + \frac{4z}{n}\right)^{-(n+4)/2} \\ &= \frac{4^2 \Gamma((n+4)/2)}{n^2 \Gamma(2) \Gamma(n/2)} \frac{z}{\sqrt{(1 + 4z/n)^{n+4}}} \\ &= \frac{4(n+2)n\Gamma(n/2)}{n^2 \Gamma(n/2)} \frac{z}{\sqrt{(1 + 4z/n)^{n+4}}} \\ &= \frac{4(n+2)}{n} \frac{z}{\sqrt{(1 + 4z/n)^{n+4}}} \end{aligned}$$

確率密度関数 ($m = 5$)

自由度 $m = 5$ に対して、F分布の確率密度関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{5,n}(z) &= \frac{(5/n)^{5/2}}{B(5/2, n/2)} z^{3/2} \left(1 + \frac{5z}{n}\right)^{-(n+5)/2} \\ &= \frac{\Gamma((n+5)/2)}{\Gamma(5/2)\Gamma(n/2)} \sqrt{\frac{(5/n)^5 z^3}{(1 + 5z/n)^{n+5}}} \\ &= \frac{(n+3)(n+1)\Gamma((n+1)/2)}{3\Gamma(n/2)} \sqrt{\frac{(5/n)^5 z^3}{\pi(1 + 5z/n)^{n+5}}} \end{aligned}$$

確率密度関数 ($m = n$)

自由度 $m = n = 1, 2, 3$ に対して、F分布の確率密度関数は次のようになる。

$$f_{1,1}(z) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{\sqrt{\pi z(1+z)^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}$$

$$f_{2,2}(z) = \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$f_{3,3}(z) = \frac{4\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} \sqrt{\frac{z}{\pi(1+z)^6}} = \frac{8}{\pi} \frac{\sqrt{z}}{(z+1)^3}$$

確率密度関数 ($m = n$)

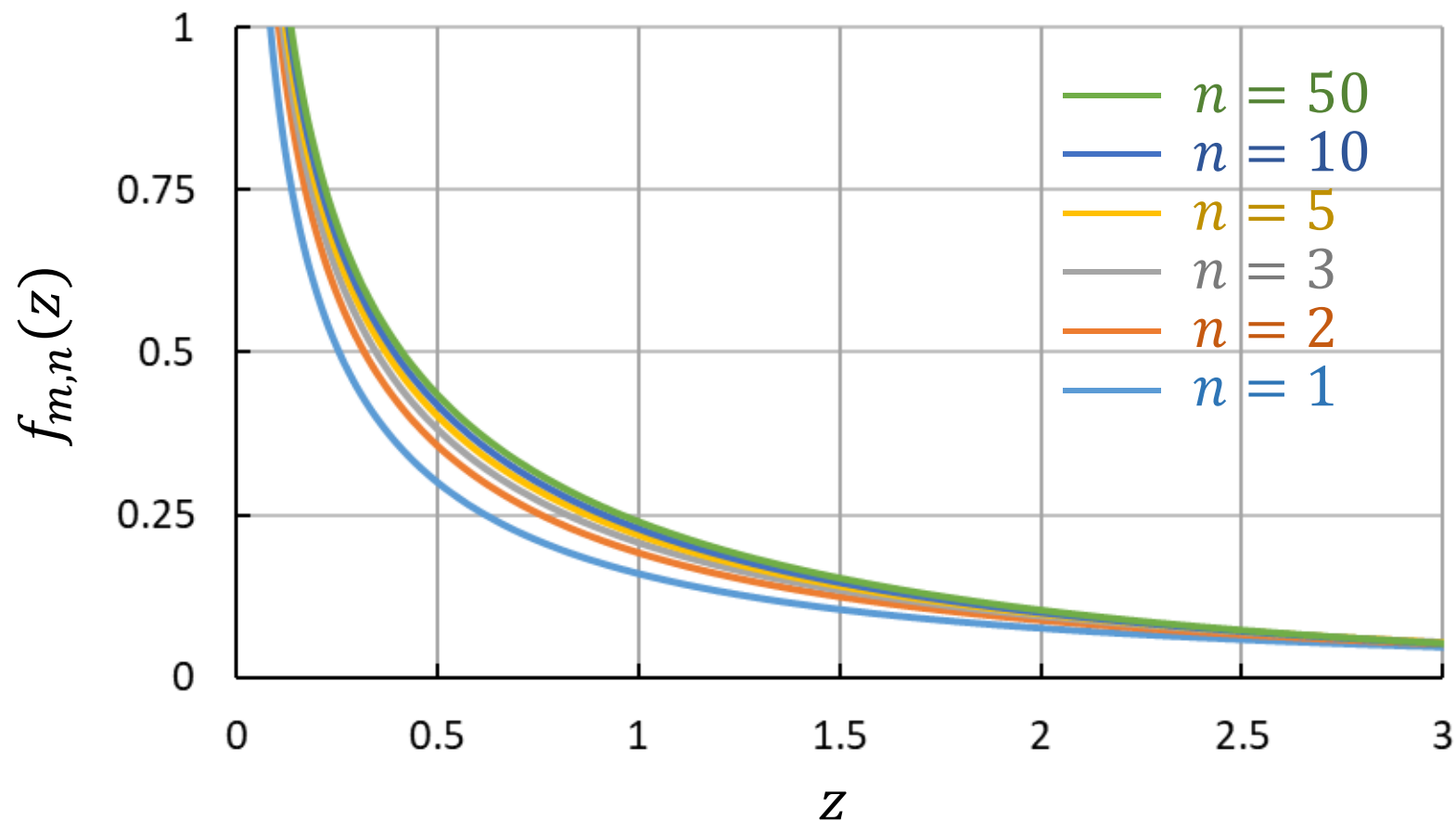
自由度 $m = n = 4, 5$ に対して、F分布の確率密度関数は次のようになる。

$$f_{4,4}(z) = \frac{4 \cdot 6}{4} \frac{z}{\sqrt{(1+z)^8}} = \frac{6z}{(z+1)^4}$$

$$\begin{aligned} f_{5,5}(z) &= \frac{8 \cdot 6\Gamma(3)}{3\Gamma(5/2)} \sqrt{\frac{z^3}{\pi(1+z)^{10}}} \\ &= \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{z^3}{\pi(z+1)^{10}}} = \frac{128}{3\pi} \frac{\sqrt{z^3}}{(z+1)^5} \end{aligned}$$

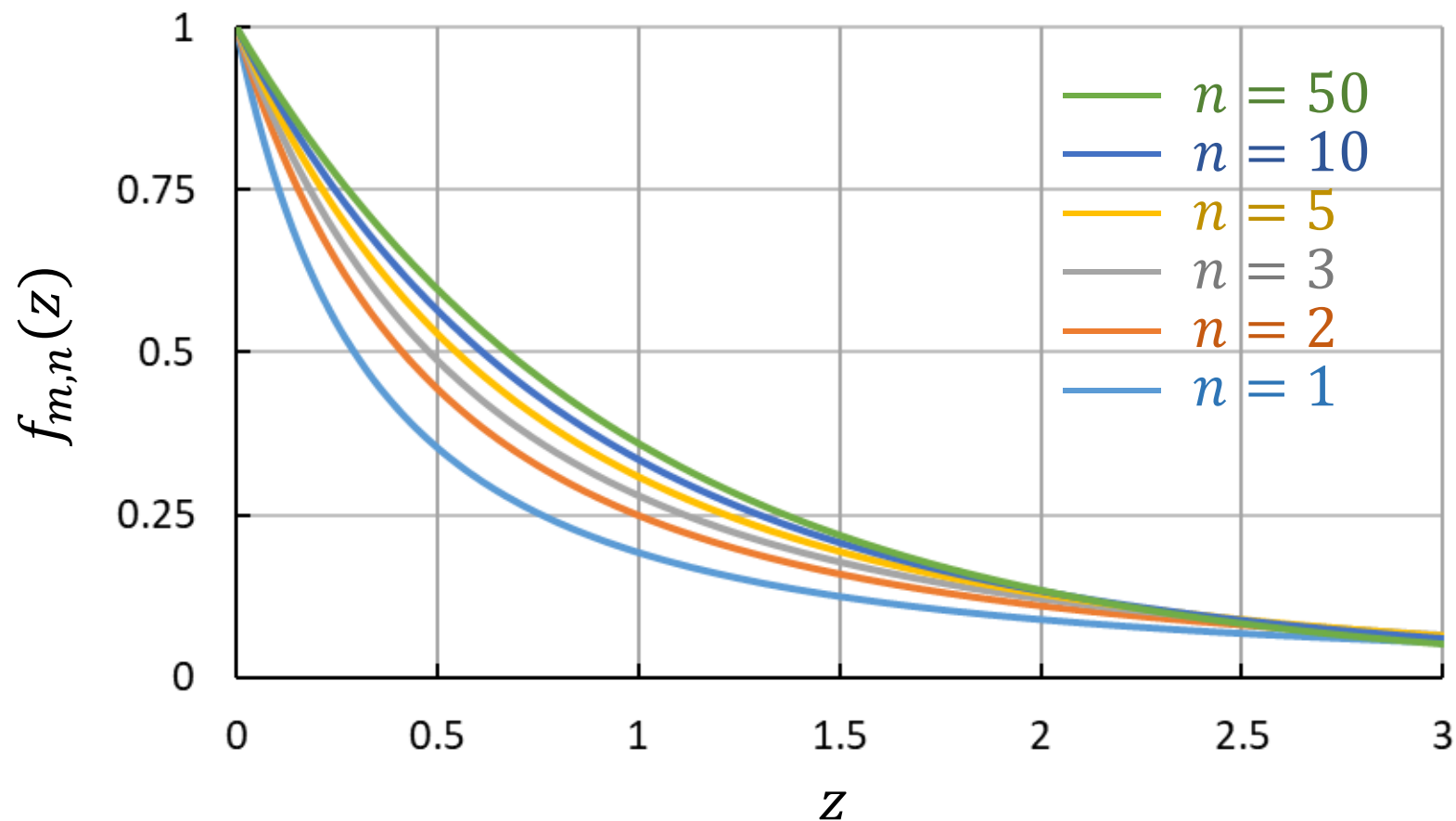
確率密度関数 ($m = 1$)

自由度 $m = 1, n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



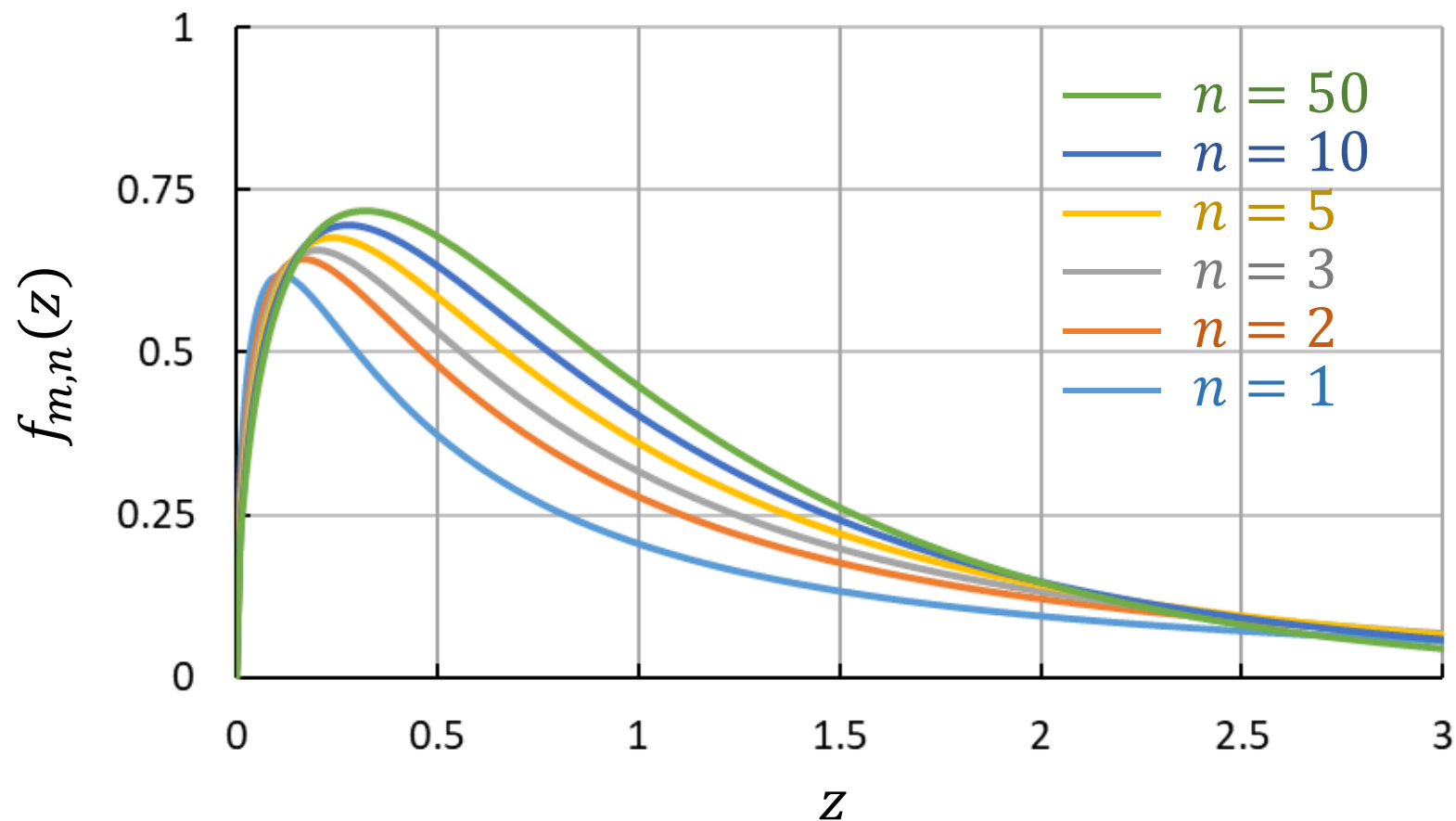
確率密度関数 ($m = 2$)

自由度 $m = 2, n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



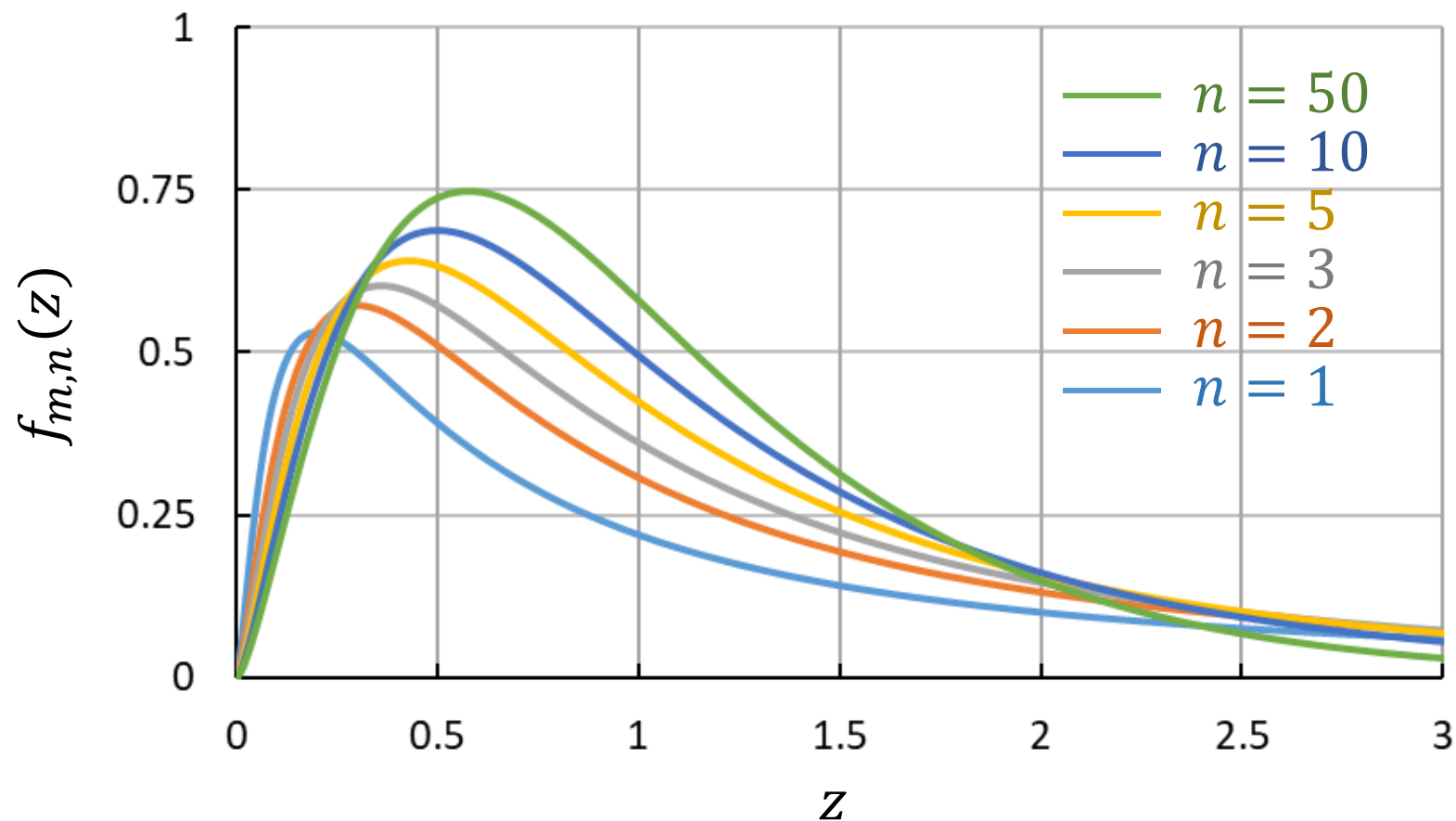
確率密度関数($m = 3$)

自由度 $m = 3, n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



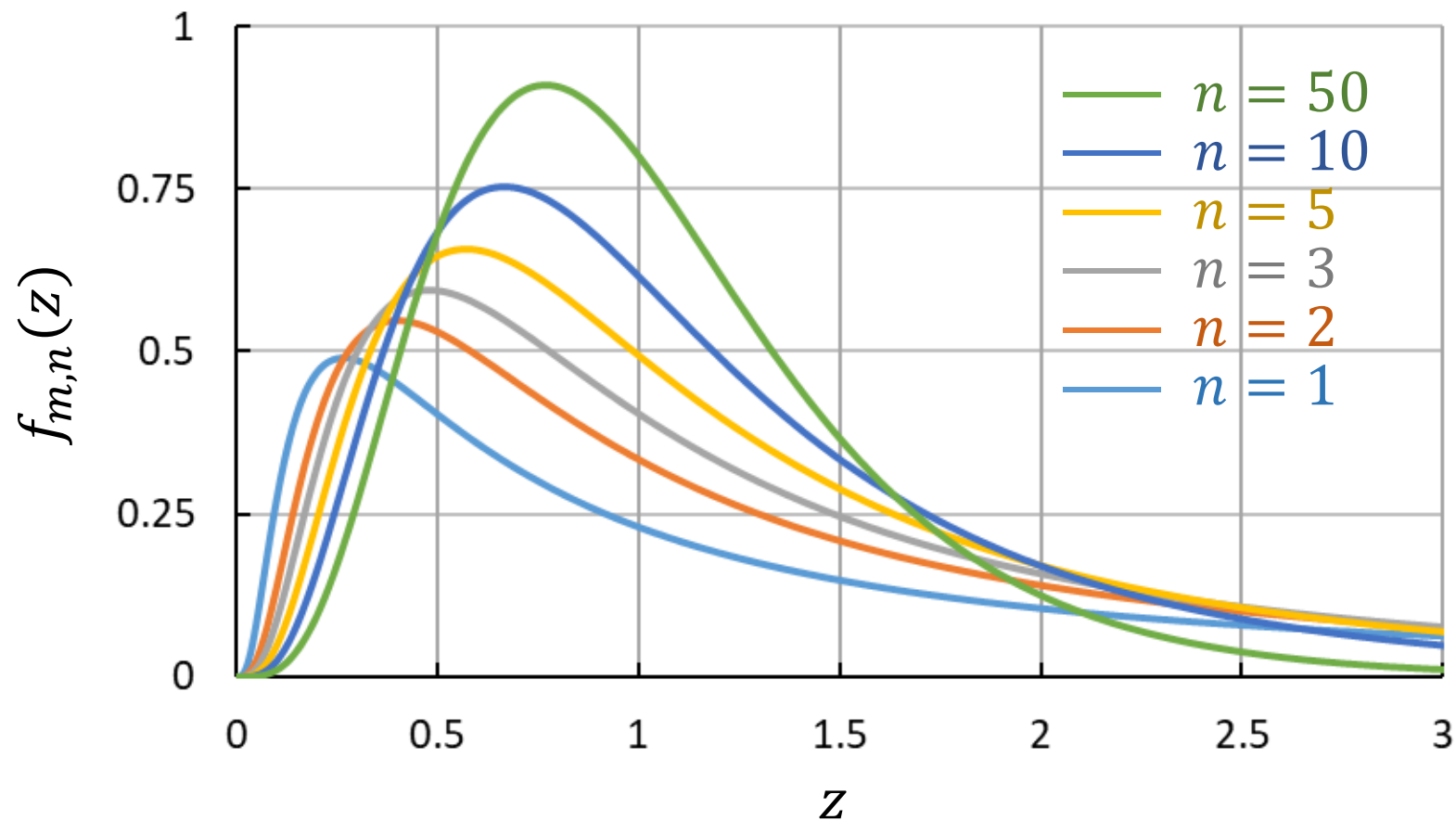
確率密度関数 ($m = 5$)

自由度 $m = 5, n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



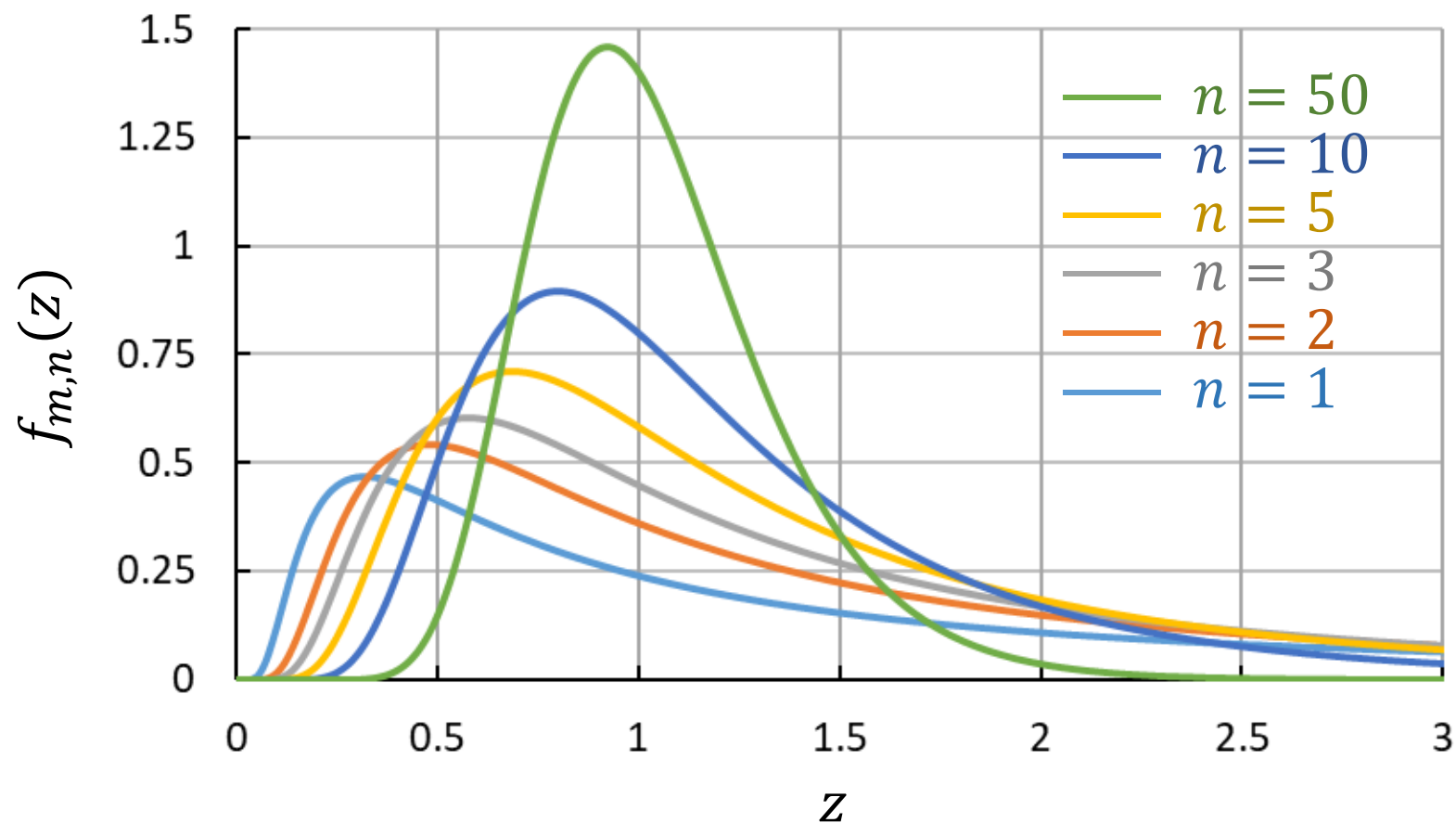
確率密度関数 ($m = 10$)

自由度 $m = 10, n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



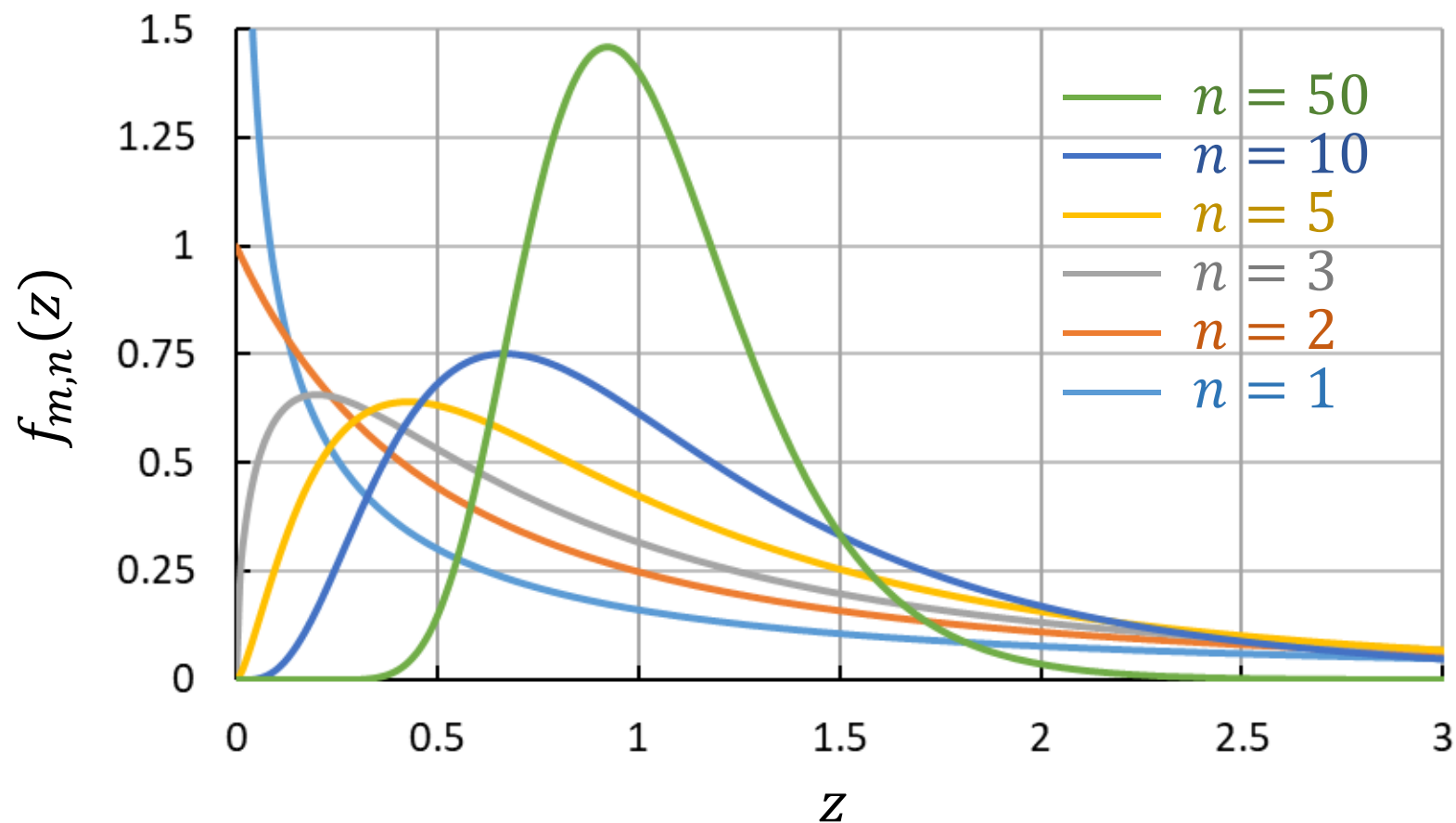
確率密度関数 ($m = 50$)

自由度 $m = 50, n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



確率密度関数 ($m = n$)

自由度 $m = n = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ のF分布の確率密度関数のグラフを下図に示す。



F分布とt分布

自由度 $(1, k)$ のF分布の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{1,k}(z) &= \frac{(1/k)^{1/2}}{B(1/2, k/2)} z^{-1/2} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-(k+1)/2} \\ &= \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)} z^{-1/2} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-(k+1)/2} \end{aligned}$$

である。変数を $z = t^2$ に変換すると、 $dz = 2t dt$ であり、

$$f_{1,k}(z) \frac{dz}{dt} = f(t) + f(-t)$$

より、 $f(t) = f(-t)$ とすると

$$f(t) = \frac{1}{2} f_{1,k}(z) \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)} t^{-1} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \cdot 2t$$

F分布とt分布

自由度 $(1, k)$ のF分布の確率密度関数を $z = t^2$ に変数変換すると

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} f_{1,k}(z) \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)} t^{-1} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \cdot 2t \\ &= \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \end{aligned}$$

これは自由度 k のt分布である。

自由度 $n-1$ のt分布にしたがう $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{X}{\sqrt{Y/(n-1)}}$ に対して

$t^2 = \left(\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{X^2}{Y/(n-1)}$ は X^2 が自由度 1 のカイ2乗分布、 $Y/(n-1)$ が

自由度 $n-1$ のカイ2乗分布にしたがうから、 t^2 は自由度 $(1, n-1)$ のF分布にしたがう。

ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$$

で定義される。

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds = [-s^{z-1} e^{-s}]_0^{\infty} + (z-1) \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds \\ &= (z-1) \Gamma(z-1)\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-s} ds = [-e^{-s}]_0^{\infty} = 1$$

ガンマ関数は、階乗を
非整数に拡張したもの

より、正の整数 n に対して、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ である。

ガンマ関数

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} s^{-1/2} e^{-s} ds = \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds$$

$s = u^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

これより、正の整数 m に対して

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{2m-1}{2} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}$$

二重階乗

$$(2m-1)!! = (2m-1) \cdot (2m-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$$

ベータ関数

ベータ関数 $B(p, q)$ は

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

で定義される。

$u = 1 - t$ とおくと

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_1^0 (1-u)^{p-1} u^{q-1} (-du) \\ &= \int_0^1 u^{q-1} (1-u)^{p-1} du = B(q, p) \end{aligned}$$

だから、 $B(p, q) = B(q, p)$ である。

ベータ関数とガンマ関数

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds$$

より

$$B(p, q) \Gamma(p+q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \int_0^\infty s^{p+q-1} e^{-s} ds$$

ここで、 $u = st, v = s(1-t)$ と変数変換すると

$$\begin{vmatrix} \partial u / \partial s & \partial u / \partial t \\ \partial v / \partial s & \partial v / \partial t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{vmatrix} = -st - s(1-t) = -s$$

より

$$dudv = |-s| ds dt = s ds dt$$

ベータ関数とガンマ関数

$$B(p, q)\Gamma(p + q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \int_0^\infty s^{p+q-1} e^{-s} ds$$

$u = st, v = s(1-t)$ と変数変換すると、 $du dv = s ds dt$ より

$$\begin{aligned} B(p, q)\Gamma(p + q) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-1}(1-t)^{q-1} s^{p+q-2} e^{-s} du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{p-1} v^{q-1} e^{-(u+v)} du dv \\ &= \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du \int_0^\infty v^{q-1} e^{-v} dv = \Gamma(p)\Gamma(q) \end{aligned}$$

$$\therefore B(p, q)\Gamma(p + q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

参考文献

- 小寺平治「新統計入門」裳華房、1996.
- 水本久夫「統計の基礎」培風館、1994.
- 薩摩順吉「確率・統計」(理工系の数学入門コース 7) 岩波書店、1989.
- 柴田文明「確率・統計」(理工系の基礎数学 7) 岩波書店、1996.
- 大鑄史男「工科のための確率・統計」(工科のための数理) 数理工学社、2005.
- 岩佐学、薩摩順吉、林利治「確率・統計」(理工系の数理) 裳華房、2018.
- 東京大学教養部統計学教室(編)「統計学入門」(基礎統計学 I) 東京大学出版会、1991.
- 竹内淳「高校数学でわかる統計学」(ブルーバックス) 講談社、2012.