ケイリー・ハミルトンの公式
（3行3列）

渡邉 俊夫

ケイリー・ハミルトンの公式

3行3列の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}\,A = a + e + l$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = ael + bfg + cdh - afh - bdl - ceg$$

として

$$\boxed{A^3 - (\mathrm{Tr}\,A)A^2 + (el - fh + al - cg + ae - bd)A - (\det A)E = O}$$

が成り立つ。これを3次の**ケイリー・ハミルトンの公式**という。

本稿では、これを成分計算により証明する。

A^2 の計算

3行3列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$$

に対して

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bd + cg & ab + be + ch & ac + bf + cl \\ ad + de + fg & bd + e^2 + fh & cd + ef + fl \\ ag + dh + gl & bg + eh + hl & cg + fh + l^2 \end{pmatrix}$$

$A^2-(\mathrm{Tr}\,A)A$ の計算

3行3列の行列 A の対角和 $\mathrm{Tr}\,A=a+e+l$ に対して

$$
\begin{aligned}
&A^2-(\mathrm{Tr}\,A)A\\
&=\begin{pmatrix} a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+cl \\ ad+de+fg & bd+e^2+fh & cd+ef+fl \\ ag+dh+gl & bg+eh+hl & cg+fh+l^2 \end{pmatrix}\\
&\qquad-(a+e+l)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} bd-ae+cg-al & ch-bl & bf-ce \\ fg-dl & bd-ae+fh-el & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & cg-al+fh-el \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$A^3 - (\mathrm{Tr}\, A)A^2$ の計算

さらに、

$$A^3 - (\mathrm{Tr}\, A)A^2 = (A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)A)A$$

$$= \begin{pmatrix} bd - ae + cg - al & ch - bl & bf - ce \\ fg - dl & bd - ae + fh - el & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & cg - al + fh - el \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$$

を計算する。

$A^3 - (\mathrm{Tr}\,A)A^2$ の各成分

赤字の項が打ち消し合って
各式が成り立つ

$A^3 - (\mathrm{Tr}\,A)A^2 = (A^2 - (\mathrm{Tr}\,A)A\,)A$ の第1行の各成分は

11成分: $a(bd - ae + cg - al) + d(ch - bl) + g(bf - ce)$

$$= (ael + bfg + cdh - afh - bdl - ceg)$$
$$- a(el - fh + al - cg + ae - bd)$$

12成分: $b(bd - ae + cg - al) + e(ch - bl) + h(bf - ce)$

$$= -b(el - fh + al - cg + ae - bd)$$

13成分: $c(bd - ae + cg - al) + f(ch - bl) + l(bf - ce)$

$$= -c(el - fh + al - cg + ae - bd)$$

$A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2$ の各成分

赤字の項が打ち消し合って
各式が成り立つ

$A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2=(A^2-(\mathrm{Tr}\,A)A\,)A$ の第2行の各成分は

21成分 : $a(fg-dl)+d(bd-ae+fh-el)+g(cd-af)$

$$=-d(el-fh+al-cg+ae-bd)$$

22成分 : $b(fg-dl)+e(bd-ae+fh-el)+h(cd-af)$

$$=(ael+bfg+cdh-afh-bdl-ceg)$$
$$-e(el-fh+al-cg+ae-bd)$$

23成分 : $c(fg-dl)+f(bd-ae+fh-el)+l(cd-af)$

$$=-f(el-fh+al-cg+ae-bd)$$

$A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2$ の各成分

赤字の項が打ち消し合って各式が成り立つ

$A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2=(A^2-(\mathrm{Tr}\,A)A\,)A$ の第3行の各成分は

31成分 : $a(dh-eg)+d(bg-ah)+g(cg-al+fh-el)$

$$=-g(el-fh+al-cg+ae-bd)$$

32成分 : $b(dh-eg)+e(bg-ah)+h(cg-al+fh-el)$

$$=-h(el-fh+al-cg+ae-bd)$$

33成分 : $c(dh-eg)+f(bg-ah)+l(cg-al+fh-el)$

$$=(ael+bfg+cdh-afh-bdl-ceg)$$
$$-l(el-fh+al-cg+ae-bd)$$

$A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2$ の計算

以上より、

$$
\begin{aligned}
&A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2\\
&=(ael+bfg+cdh-afh-bdl-ceg)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad-(el-fh+al-cg+ae-bd)\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&l\end{pmatrix}\\
&=(ael+bfg+cdh-afh-bdl-ceg)E\\
&\qquad\qquad-(el-fh+al-cg+ae-bd)A
\end{aligned}
$$

ケイリー・ハミルトンの公式

ここで、3行3列の行列 A の行列式

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = ael + bfg + cdh - afh - bdl - ceg$$

を用いると

$$\begin{aligned} A^3 - (\mathrm{Tr}\, A)A^2 &= (ael + bfg + cdh - afh - bdl - ceg)E \\ &\quad - (el - fh + al - cg + ae - bd)A \\ &= (\det A)E - (ae - bd + el - fh + al - cg)A \end{aligned}$$

ゆえに、

$$A^3 - (\mathrm{Tr}\, A)A^2 + (el - fh + al - cg + ae - bd)A - (\det A)E = O$$

補足

3行3列の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$ に対するケイリー・ハミルトンの公式

$$A^3-(\mathrm{Tr}\,A)A^2+(el-fh+al-cg+ae-bd)A-(\det A)E=O$$

の A の1次の係数は、主小行列式の和（対角成分 a,e,l の小行列式の和）

$$el-fh+al-cg+ae-bd=\begin{vmatrix} e & f \\ h & l \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ g & l \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

である。