逆双曲線関数の対数表示

渡邉 俊夫

$\cosh x$ の逆関数

双曲線余弦関数 $\cosh x$ は指数関数を用いて

$$y = \cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

と表される。これを x について解くと

$$\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 2y$$

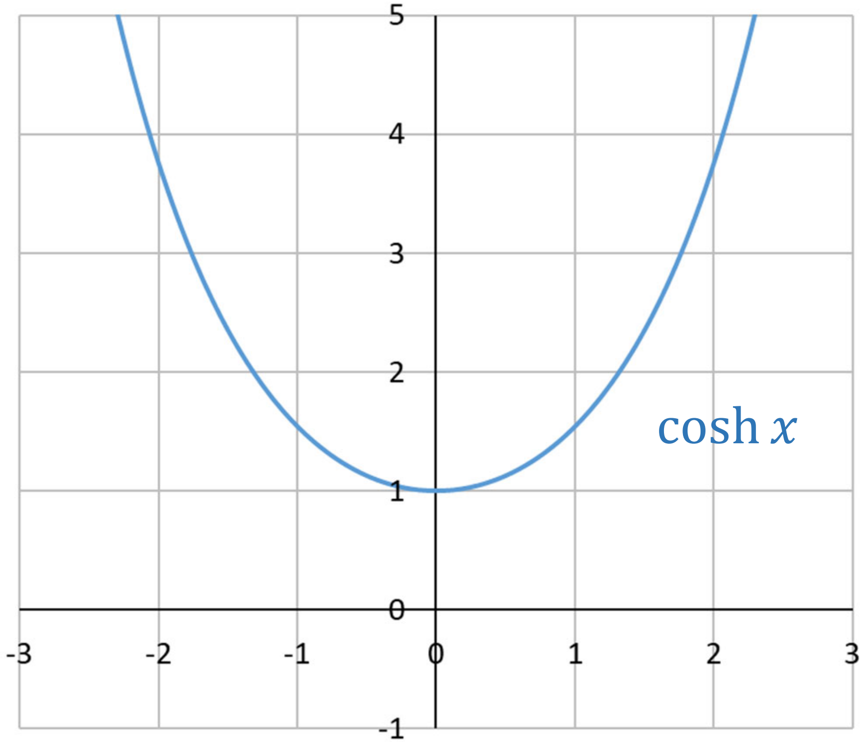
$$\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^{x} + 1 = 0$$

$$\mathrm{e}^{x} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\therefore x = \log\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

よって、逆双曲線余弦関数は、対数関数を用いて次のように表される。

$$y = \cosh^{-1} x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$



$\cosh x$ の逆関数

双曲線余弦関数

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

の逆関数は、次のように表される。

$$y = \cosh^{-1} x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

ここで、

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

だから、次のように表すこともできる。

$$y = \cosh^{-1} x = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$\cosh^{-1} x$ の微分

逆双曲線余弦関数

$$y = \cosh^{-1} x = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

の微分は、次のようになる。

$$y' = (\cosh^{-1} x)' = \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$\sinh x$ の逆関数

双曲線正弦関数 $\sinh x$ は指数関数を用いて

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

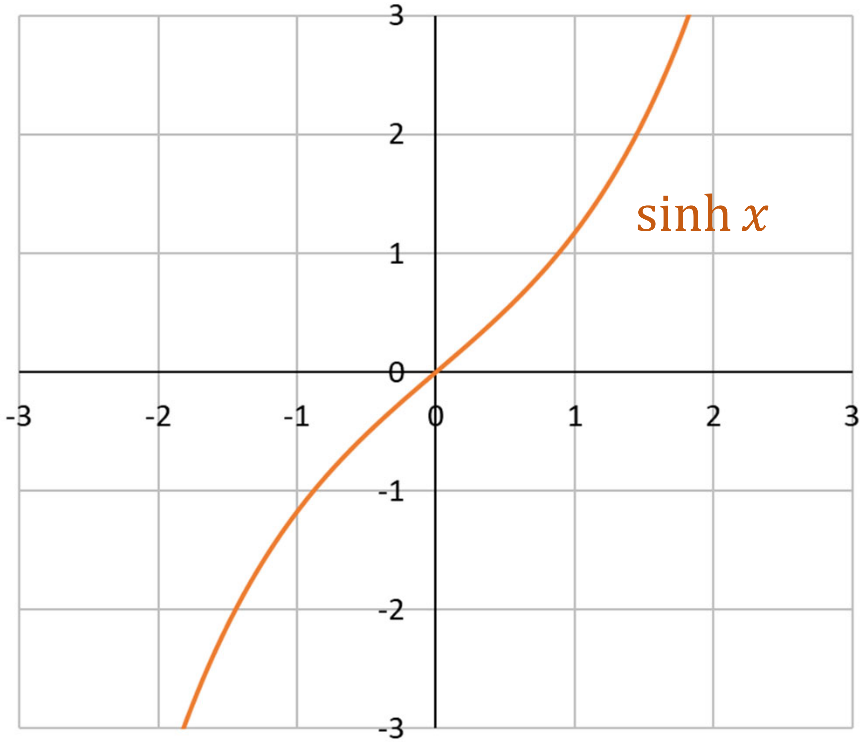
と表される。これを x について解くと

$$e^x - e^{-x} = 2y$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\therefore x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$



$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ を e^x について解くと
$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ であるが、
$e^x > 0$ だから、負号は採らない

よって、逆双曲線正弦関数は、対数関数を用いて次のように表される。

$$y = \sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$\sinh^{-1} x$ の微分

逆双曲線正弦関数

$$y = \sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

の微分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} y' = (\sinh^{-1} x)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$\tanh x$ の逆関数

双曲線正接関数 $\tanh x$ は指数関数を用いて

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$

と表される。これを x について解くと

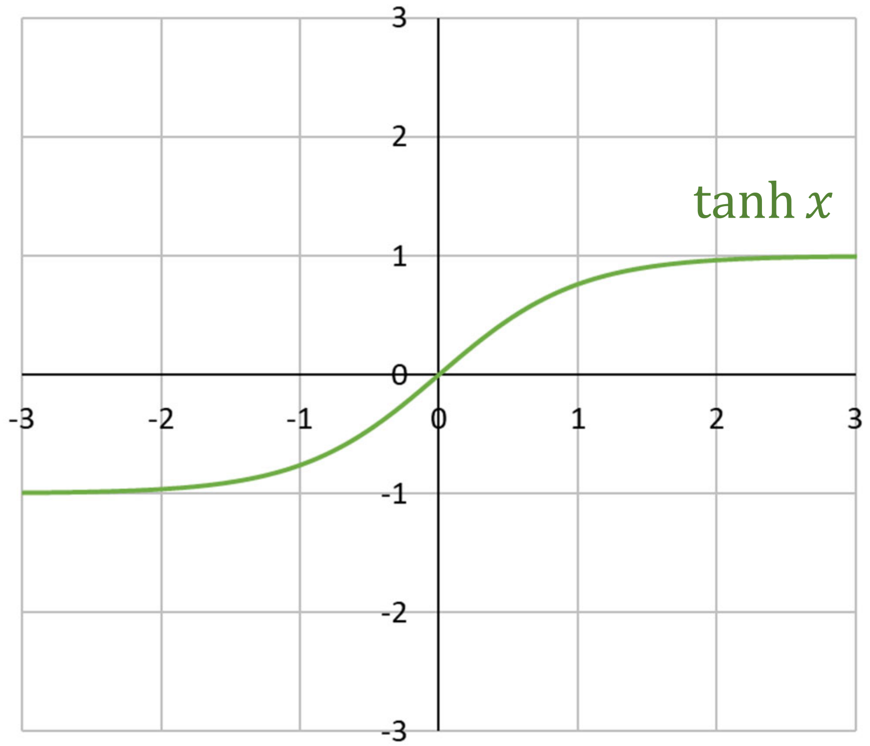
$$\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = y(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$$

$$(1-y)\mathrm{e}^{x} = (1+y)\mathrm{e}^{-x}, \qquad (1-y)\mathrm{e}^{2x} = 1 + y$$

$$2x = \log\frac{1+y}{1-y} \qquad \therefore\ x = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

よって、逆双曲線正弦関数は、対数関数を用いて次のように表される。

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$



$\tanh^{-1} x$ の微分

双曲線逆正接関数

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

の微分は

$$y' = (\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

となる。

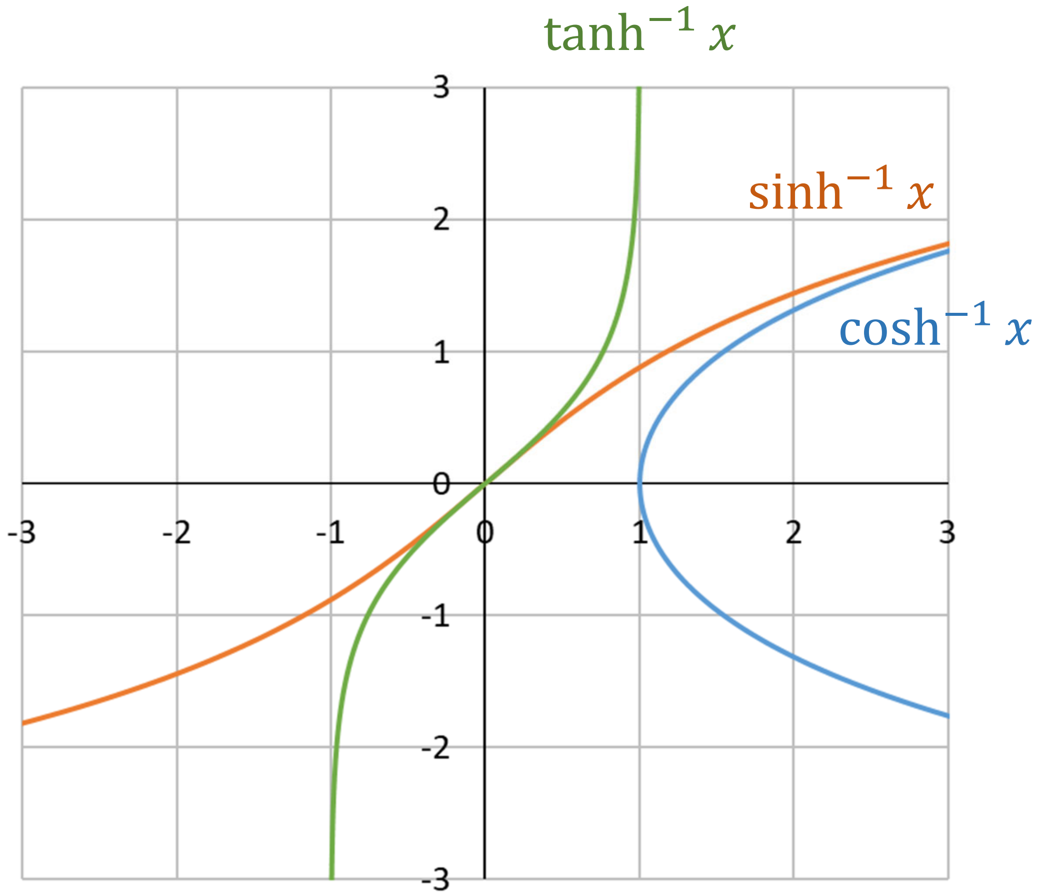
まとめ

逆双曲線関数は、対数関数を用いて次のように表される。

$$\cosh^{-1} x = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$



まとめ

逆双曲線関数の微分は、次のようになる。

$$(\cosh^{-1} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$