

4度目の期待値

2024.11.4
渡邊 俊夫

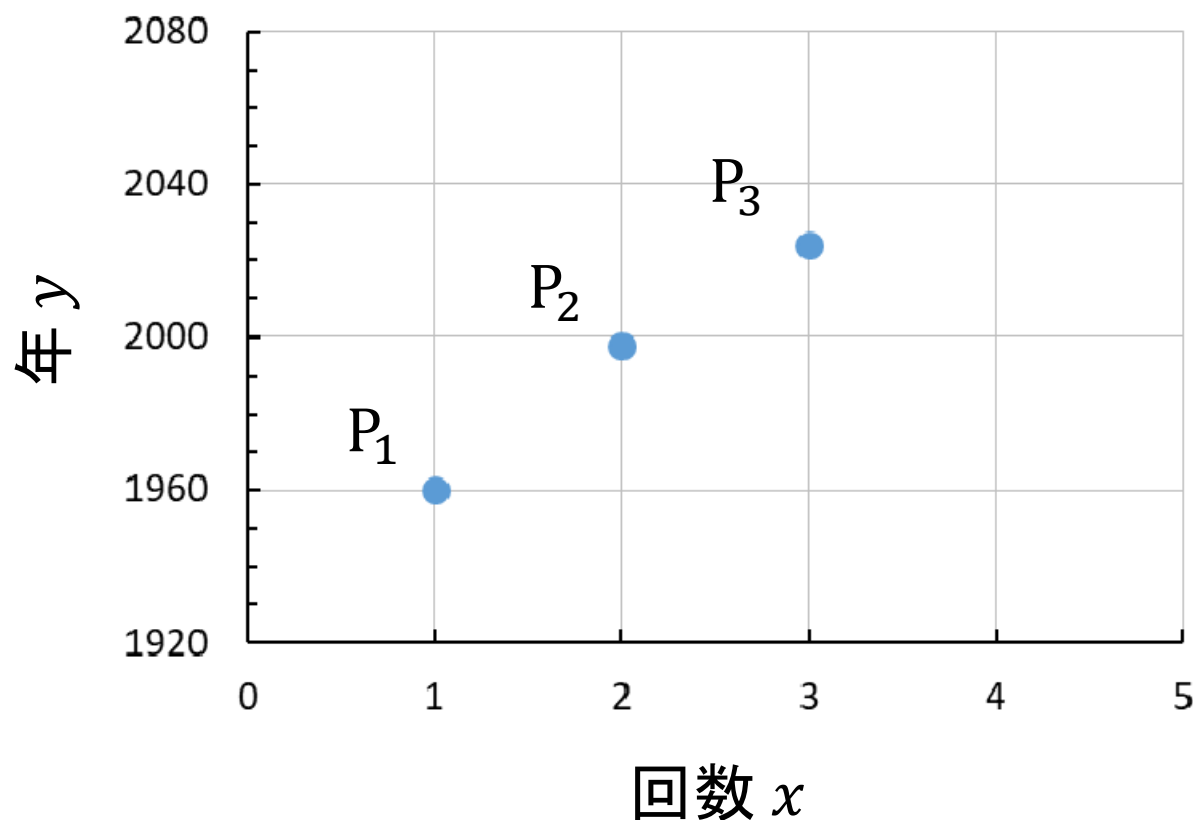
問題

2024年、横浜DeNAベイスターズはプロ野球セントラル・リーグ3位からクライマックスシリーズを勝ち抜いて日本シリーズに進出し、パシフィック・リーグを制した福岡ソフトバンクホークスを4勝2敗で下して日本一となった。

横浜DeNAベイスターズが日本一になるのは、大洋ホエールズ時代の1960年、横浜ベイスターズ時代の1998年に続いて3度目である。前回の1998年は38年ぶり、今回は26年ぶりの日本一であったが、計算上の期待値として、次に4度目の日本一になるのはいつだろうか？

定式化

日本一の回数 x を横軸、その年 y を縦軸にとると、これまでの実績は3点 P_1, P_2, P_3 で表される。これを $x = 4$ へ外挿して P_4 を求める。



$$P_3: (x_3, y_3) = (3, 2024)$$

$$P_2: (x_2, y_2) = (2, 1998)$$

$$P_1: (x_1, y_1) = (1, 1960)$$

1次式による補間

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を1次式 $y = ax + b$ で補間すると、傾きは2つの区間の平均より

$$a = \frac{(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2)}{2} = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

となる(これが最小二乗法で定まる傾きに一致することは付録1を参照)。また、直線が3点の平均 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通ることより

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} - 2a$$

となる。したがって、1次式による補間は

$$y = ax + b = a(x - 2) + 2a + b = \frac{y_3 - y_1}{2}(x - 2) + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

と表される。

1次式による補間

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を1次式

$$y = \frac{y_3 - y_1}{2} (x - 2) + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

で補間すると

$$\frac{y_3 - y_1}{2} = \frac{2024 - 1960}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{1960 + 1998 + 2024}{3} = \frac{5982}{3} = 1994$$

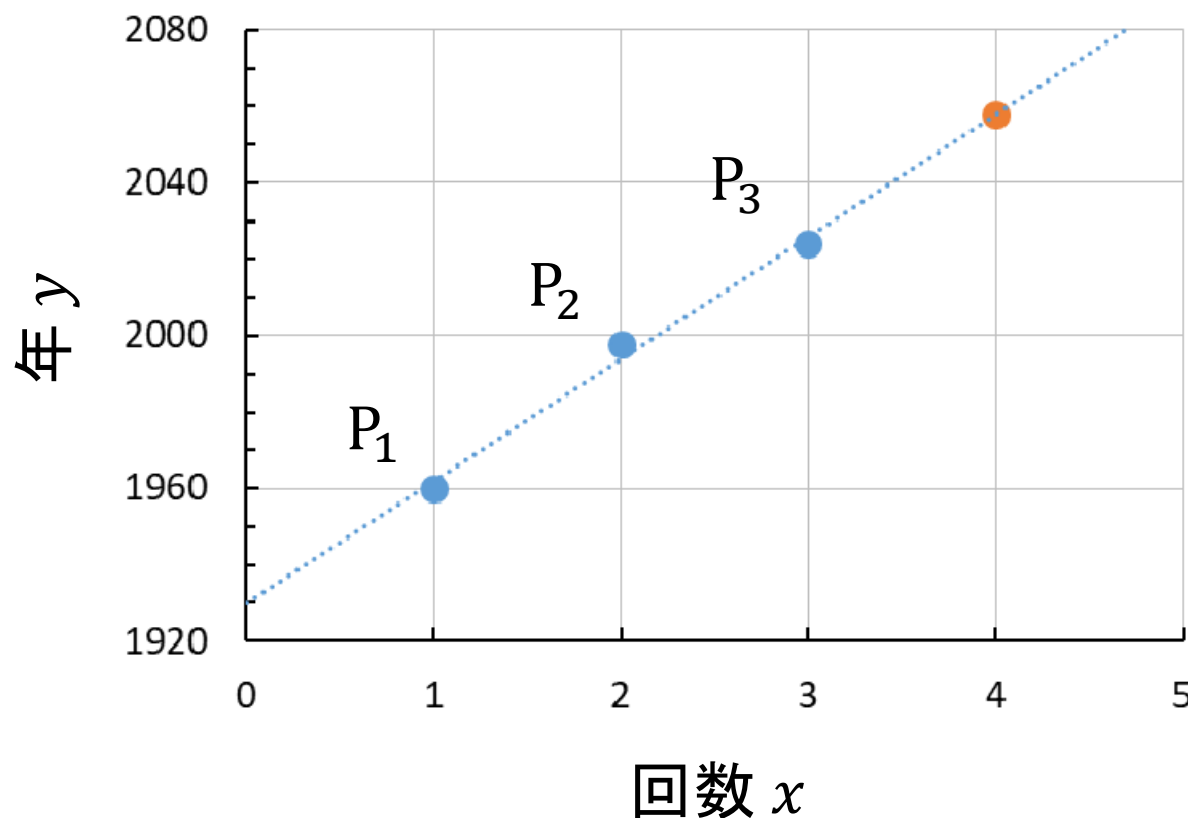
より

$$y_4 = 32 \cdot (4 - 2) + 1994 = 64 + 1994 = 2058$$

となる。

1次式による補間

3点 P_1, P_2, P_3 を1次式 $y = 32(x - 2) + 1994$ で補間すると $y_4 = 2058$ となる。つまり、次の日本一は34年後の2058年である。



2次式による補間

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を2次式 $y = ax^2 + bx + c$ で補間すると、曲線が3点を通ることより

$$y_1 = a + b + c$$

$$y_2 = 4a + 2b + c$$

$$y_3 = 9a + 3b + c$$

となる。これを解いて

$$a = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2}, b = \frac{-5y_1 + 8y_2 - 3y_3}{2}, c = 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

を得る(係数 a の意味については付録2を参照)。

2次式による補間

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を通る2次式 $y = ax^2 + bx + c$ は

$$a = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2}, b = \frac{-5y_1 + 8y_2 - 3y_3}{2}, c = 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

より

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 4ax - 4a + b(x-2) + 2b + c \\ &= a(x-2)^2 + (4a+b)(x-2) + 8a - 4a + 2b + c \\ &= a(x-2)^2 + (4a+b)(x-2) + 4a + 2b + c \\ &= \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} (x-2)^2 + \frac{y_3 - y_1}{2} (x-2) + y_2 \end{aligned}$$

と表すこともできる(これがラグランジュ補間の式に一致することは付録3を参照)。

2次式による補間

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を通る2次式は

$$y = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} (x - 2)^2 + \frac{y_3 - y_1}{2} (x - 2) + y_2$$

であり、

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} = \frac{1960 - 2 \times 1998 + 2024}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$\frac{y_3 - y_1}{2} = \frac{2024 - 1960}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

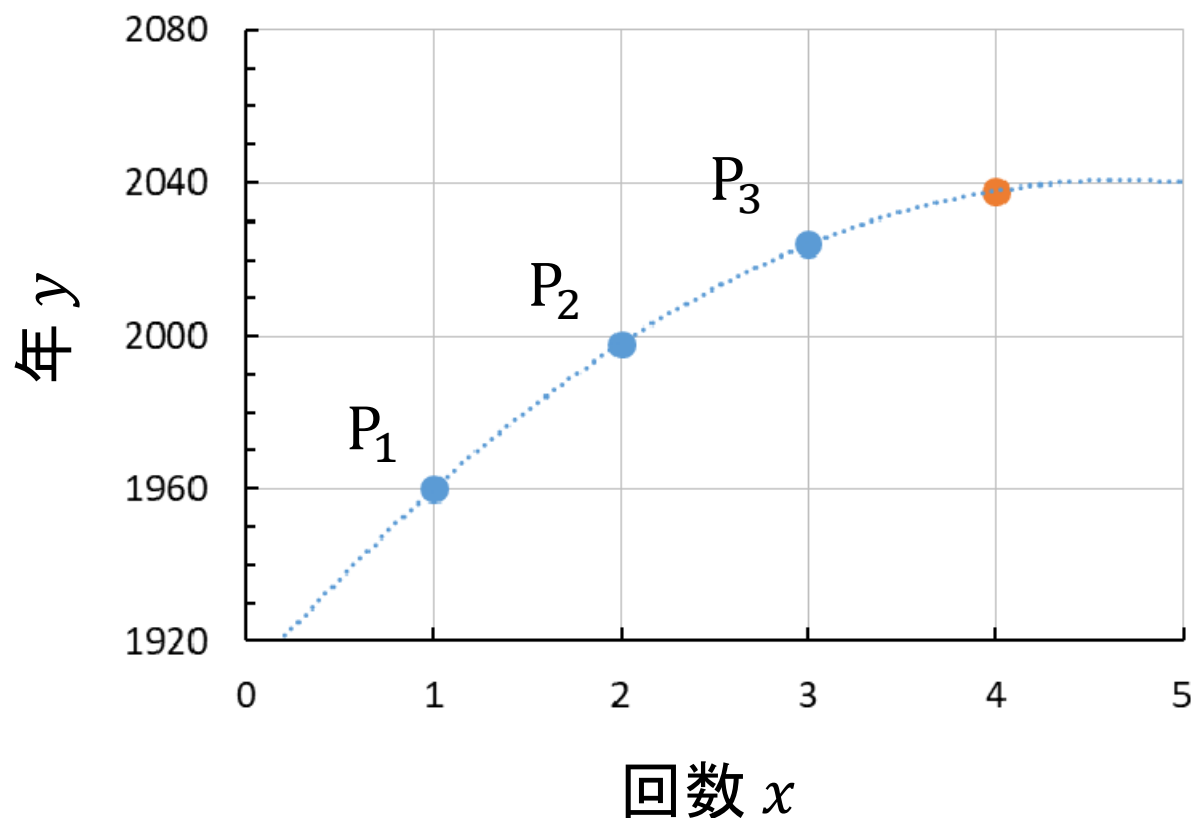
より

$$y_4 = -6 \cdot (4 - 2)^2 + 32 \cdot (4 - 2) + 1998 = 2038$$

となる。

2次式による補間

3点 P_1, P_2, P_3 を2次式 $y = -6(x - 2)^2 + 32(x - 2) + 1998$ で補間すると $y_4 = 2038$ となる。つまり、次の日本一は14年後の2038年である。



まとめ

2024年、横浜DeNAベイスターズは、大洋ホエールズ時代の1960年、横浜ベイスターズ時代の1998年に続いて3度目の日本一に輝いた。これを外挿すると、次に日本一になるのは、1次式で補間した場合は34年後の2058年、2次式で補間した場合は14年後の2038年である。むろん、これはあくまで計算上の期待値である。個人的にはぜひ来年、リーグ優勝と日本一の完全制覇を成し遂げてほしいと願っている。

謝辞

いつも雑学談義にお付き合いいただき安部哲哉氏に感謝申し上げます。

付録1

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ に対して

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1 + 2 + 3 = 6, \quad \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = y_1 + y_2 + y_3, \quad \sum_{i=1}^3 x_i y_i = y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

だから、**最小二乗法**により1次式 $y = ax + b$ で近似したときの傾きは

$$\begin{aligned} a &= \frac{3 \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{3 \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{3(y_1 + 2y_2 + 3y_3) - 6(y_1 + y_2 + y_3)}{3 \cdot 14 - 6^2} \\ &= \frac{3y_3 - 3y_1}{6} = \frac{y_3 - y_1}{2} \end{aligned}$$

付録2

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を通る2次式

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} (x - 2)^2 + \frac{y_3 - y_1}{2} (x - 2) + y_2 \end{aligned}$$

の2次の係数は

$$a = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} = \frac{(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)}{2}$$

であり、2つの区間の傾きの差の $1/2$ を表している。

$a > 0$ であれば(傾きが増加するので)2次式は下に凸、 $a < 0$ であれば(傾きが減少するので)2次式は上に凸である。 $a = 0$ であれば(傾きは一定であり)3点は直線上にある。

付録2(つづき)

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を通る2次式

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} (x - 2)^2 + \frac{y_3 - y_1}{2} (x - 2) + y_2 \end{aligned}$$

の2次の係数は

$$a = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} = \frac{y_1 + y_3}{2} - y_2$$

であり、 P_1 と P_3 の平均と P_2 との差を表しているとも言える。

$a > 0$ であれば2次式は下に凸、 $a < 0$ であれば2次式は上に凸である。

$a = 0$ であれば3点は直線上にある。

付録3

3点 $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, $P_3(3, y_3)$ を通る2次式は、**ラグランジュ補間**を用いて、次のように導出することもできる。

$$\begin{aligned} y &= y_1 \frac{x-2}{1-2} \frac{x-3}{1-3} + y_2 \frac{x-1}{2-1} \frac{x-3}{2-3} + y_3 \frac{x-1}{3-1} \frac{x-2}{3-2} \\ &= \frac{y_1}{2} (x-2)(x-3) - y_2 (x-1)(x-3) + \frac{y_3}{2} (x-1)(x-2) \\ &= \frac{y_1}{2} \{(x-2)^2 - (x-2)\} - y_2 \{(x-2)^2 - 1\} \\ &\quad + \frac{y_3}{2} \{(x-2)^2 + (x-2)\} \\ &= \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2} (x-2)^2 + \frac{y_3 - y_1}{2} (x-2) + y_2 \end{aligned}$$