9　演習・課題 (2016-07-29) 解答例

□**問題** 1.　一巡伝達関数が次式で表される制御系の根軌跡を描きたい．以下の問いに答え，根軌跡を完成させなさい．(問いのカッコ内の性質は，教科書 pp.117–118 を参照)

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad (K \text{ は定数})$$

(1) 根軌跡の始点と終点を示しなさい．(性質②)

(2) 漸近線を示しなさい．(性質⑤, ⑥)

(3) 分離点を求めなさい．(性質⑦)

(4) 虚軸との交点を求めなさい．(性質⑨)

(解答例)

(1) 始点：極 $s = 0, -1, -2$；
終点：無限遠点 (零点は 0 個)

(2) 漸近線：交点 $s = -1$ から出発して無限遠点に至る，偏角 $-60^\circ, -180^\circ, -300^\circ$ の直線

(3) 特性方程式は，

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad \text{より} \quad s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

これを書き直して，$K = f(s)$ の形で表すと，実軸との分離点は以下の方程式の根として求められる．

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = -3s^2 - 6s - 2 = 0$$

この方程式の根は，

$$s = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0.423, -1.577$$

これらのうち，根軌跡の性質④から，分離点は$\underline{s = -0.423}$である．　$\cdots$　(答)

(4) ラウスの安定判別法を用いて，虚軸と交わるとき (安定限界) の K の値を求める．(3) で示した特性方程式を参照すると，ラウス表は右のようになる．

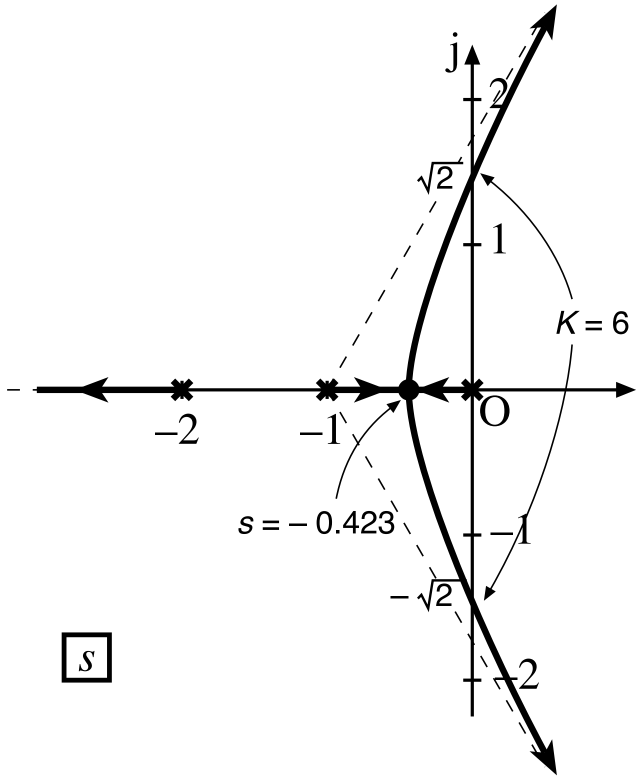
s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{3\times2-1\times K}{3}$	0
s^0	K	0

安定であるための必要十分条件は，最左列 $\left\{1, 3, \frac{6-K}{3}, K\right\}$ が同符号になることである．したがって，安定となる K の範囲は $0 < K < 6$，安定限界における K の値は，$K = 6$ である．

$K = 6$ における特性方程式の根が虚軸との交点であり，それは，

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = (s^2+2)(s+3) = 0 \quad \text{より} \quad \underline{s = \pm \mathrm{j}\sqrt{2}} \quad \cdots \quad (\text{答})$$

以上の結果をまとめて根軌跡を描くと，下図のようになる．



根軌跡