8 課題 (2016-07-15) 解答例

□**問題** 1. 前向き経路伝達関数が，次式で表されるユニティフィードバック制御系について，以下の問いに答えなさい．ただし，$\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 3 = 0.477$ とする．(2013-08-02 実施,「制御工学」期末試験問題より)

$$G(s) = \frac{4K}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3} \qquad (K \text{ は定数})$$

1) 一巡伝達関数 (周波数伝達関数) の位相が，-180° になる角周波数 ω_g [rad/s] を求めなさい．

2) $K = 6$ のときのゲイン余裕 g_m [dB] を求めなさい．※ $\omega = \omega_g$ における一巡伝達関数の値から求める．

(解答例)

1) ユニティフィードバック制御系の一巡伝達関数は，前向き経路伝達関数に等しく，

$$G(s) = \frac{4K}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3}$$

周波数伝達関数では，$s \to \mathrm{j}\omega$ とおいて，

$$\begin{aligned} G(\mathrm{j}\omega) &= \frac{4K}{(\mathrm{j}\omega)^3 + 5(\mathrm{j}\omega)^2 + 7\mathrm{j}\omega + 3} = \frac{4K}{(3-5\omega^2) + \mathrm{j}\omega(7-\omega^2)} \\ &= \frac{4K(3-5\omega^2)}{(3-5\omega^2)^2 + \omega^2(7-\omega^2)^2} - \mathrm{j}\frac{4K\omega(7-\omega^2)}{(3-5\omega^2)^2 + \omega^2(7-\omega^2)^2} \end{aligned}$$

題意を満たすためには，角周波数 $\omega = \omega_g$ において，ナイキスト軌跡が実軸の負の部分と交わる必要がある．すなわち，

$$\mathrm{Im}G(\mathrm{j}\omega_g) = 0\,,\ \mathrm{Re}G(\mathrm{j}\omega_g) < 0$$

より，

$$\omega_g = \pm\sqrt{7}\,,\ \mathrm{Re}G(\mathrm{j}\omega_g) = \frac{4K}{3 - 5\cdot 7} = -\frac{K}{8} < 0$$

ここで，$\omega_g > 0$ より，

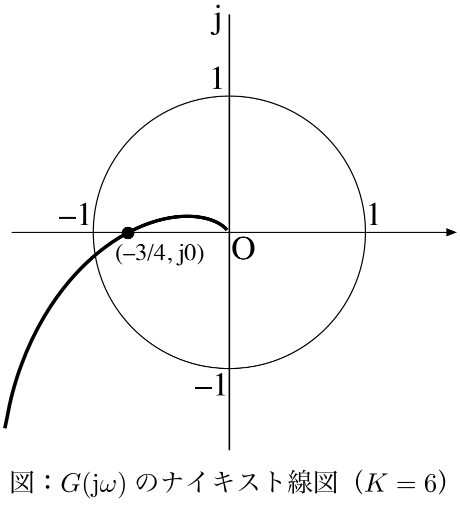
$$\omega_g = \sqrt{7}\ \text{[rad/s]} \quad \cdots \quad (\text{答})$$

2) 1) の結果から，ナイキスト軌跡が実軸の負の部分と交わる点の座標は，$(-\frac{K}{8}\,,\ \mathrm{j}0)$ である（右図）．
このとき，ゲイン余裕 g_m は，

$$g_m = 20\log_{10}\left|\frac{1}{-\frac{K}{8}}\right| = 20\log_{10}\left|\frac{8}{K}\right|$$

と書ける．
したがって，$K = 6$ におけるゲイン余裕 g_m は，

$$\begin{aligned} g_m &= 20\log_{10}\frac{8}{6} \\ &= 20\log_{10}\frac{4}{3} \\ &= 20(\log_{10}4 - \log_{10}3) \\ &= 20(2\cdot 0.301 - 0.477) \\ &= 2.50\ \text{[dB]} \quad \cdots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



図：$G(\mathrm{j}\omega)$ のナイキスト線図（$K = 6$）

【解説】

ゲイン余裕を式を使って求める問題である．ナイキスト線図およびボード線図におけるゲイン余裕および位相余裕について理解しておくこと．