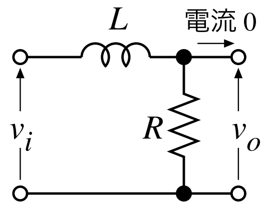
4 課題 4(2016-05-20) 解答例

□**問題** 1. 図の RL 回路の伝達関数 $G(s)$ およびインパルス応答 $g(t)$ は，次式で与えられる．

$$G(s) = \frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s+R/L}\ ,\ g(t) = \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-(R/L)t}$$

この RL 回路にランプ波 $v_i(t) = tu(t)$ を入力した．ここで，$u(t)$ は単位ステップ関数である．以下の各問いに答えなさい．ただし，$\mathcal{L}\{v_i(t)\} = V_i(s), \mathcal{L}\{v_o(t)\} = V_o(s)$ とする．



図：RL 回路

1) 出力のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めなさい．

2) 1) の結果をラプラス逆変換することによって，出力 (ランプ応答)$v_o(t)$ を求めなさい．

(解答例) ※説明のため，以下の解答例では式の変形を詳しく記述している．

1) 入力のラプラス変換 $V_i(s)$ は，

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

出力のラプラス変換 $V_o(s)$ は，

$$V_o(s) = G(s)V_i(s) = \frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s^2(s+R/L)} \quad \cdots \quad (答)$$

2) $V_o(s)$ は，次のように部分分数展開できる．

$$\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s^2(s+R/L)} = \frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+R/L}\cdots \quad (1)$$

係数 A, B, C は次のようにして決定できる．

- 式 (1) の両辺に s^2 をかけ，$s = 0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s^2(s+R/L)}s^2 &= \frac{A}{s^2}s^2+\frac{B}{s}s^2+\frac{C}{s+R/L}s^2 \quad \cdots \quad (2)\\
\frac{R}{L}\cdot\left.\frac{1}{s+R/L}\right|_{s=0} &= \left.\left[A+Bs+\frac{C}{s+R/L}s^2\right]\right|_{s=0}\\
A &= 1
\end{aligned}$$

- 式 (2) の両辺を s で微分して，$s = 0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
-\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{(s+R/L)^2} &= B+C\frac{2s(s+R/L)-s^2}{(s+R/L)^2}\\
B &= -\frac{L}{R}
\end{aligned}$$

- 式 (1) の両辺に $s+R/L$ をかけ，$s+R/L = 0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s^2(s+R/L)}(s+R/L) &= \frac{A}{s^2}(s+R/L)+\frac{B}{s}(s+R/L)+\frac{C}{s+R/L}(s+R/L)\\
\frac{R}{L}\cdot\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s+R/L=0} &= \left.\left[\frac{A}{s^2}(s+R/L)+\frac{B}{s}(s+R/L)+C\right]\right|_{s+R/L=0}\\
C &= \frac{L}{R}
\end{aligned}$$

問題の式の部分分数展開は，次のようになる．

$$\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s^2(s+R/L)}=\frac{1}{s^2}-\frac{L}{R}\cdot\frac{1}{s}+\frac{L}{R}\cdot\frac{1}{s+R/L}$$

これにラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s^2(s+R/L)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{L}{R}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{L}{R}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+R/L}\right\} \\ &= t-\frac{L}{R}+\frac{L}{R}\mathrm{e}^{-(R/L)t} \quad (t\geq 0) \quad \cdots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【解説】

1) は伝達関数を用いる基本的な問題．

2) はラプラス変換を用いて，システムの過渡応答（ランプ応答）を求める問題である．ラプラス変換を用いずに時間領域でこのランプ応答を求めるには，以下に示すように**たたみ込み**による計算が必要である．

たたみ込みを用いると，出力 $v_o(t)$ は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} v_o(t) &= g * v_i \\ &= \int_0^t g(t-\tau)v_i(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-(R/L)(t-\tau)}\tau\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-(R/L)t}\int_0^t \tau\mathrm{e}^{(R/L)\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-(R/L)t}\left\{\left[\tau\frac{L}{R}\mathrm{e}^{(R/L)\tau}\right]_0^t-\int_0^t\frac{L}{R}\mathrm{e}^{(R/L)\tau}\mathrm{d}\tau\right\} \\ &= \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-(R/L)t}\left\{t\frac{L}{R}\mathrm{e}^{(R/L)t}-0-\left[\frac{L^2}{R^2}\mathrm{e}^{(R/L)\tau}\right]_0^t\right\} \\ &= t-\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-(R/L)t}\left(\frac{L^2}{R^2}\mathrm{e}^{(R/L)t}-\frac{L^2}{R^2}\right) \\ &= t-\frac{L}{R}+\frac{L}{R}\mathrm{e}^{-(R/L)t} \quad (t\geq 0) \quad \cdots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

これは，2) のラプラス変換による計算結果と一致する．