3 課題 3(2016-05-11) 解答例

説明のため，この解答例では計算過程を詳しく述べている．

□**問題** 1. 次のラプラス変換を部分分数に展開し逆変換しなさい．

1) $\dfrac{3s+5}{s^2+s-12}$ 2) $\dfrac{3s+4}{s^2+4s+4}$ 3) $\dfrac{2s+4}{s^2+4s+13}$

(解答例)

1) 問題の式は，次のように部分分数展開できる．

$$\frac{3s+5}{s^2+s-12} = \frac{3s+5}{(s-3)(s+4)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+4}$$

係数 A, B は次のようにして決定できる．

上の式の両辺に $s-3$ をかけ，$s-3=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{3s+5}{(s-3)(s+4)}(s-3) &= \frac{A}{s-3}(s-3) + \frac{B}{s+4}(s-3) \\
\left.\frac{3s+5}{s+4}\right|_{s-3=0} &= \left.\left[A + \frac{B}{s+4}(s-3)\right]\right|_{s-3=0} \\
A &= \frac{3\cdot 3+5}{3+4} = \frac{14}{7} = 2
\end{aligned}$$

同様にして，$s+4$ をかけ，$s+4=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{3s+5}{(s-3)(s+4)}(s+4) &= \frac{A}{s-3}(s+4) + \frac{B}{s+4}(s+4) \\
\left.\frac{3s+5}{s-3}\right|_{s+4=0} &= \left.\left[\frac{A}{s-3}(s+4) + B\right]\right|_{s+4=0} \\
B &= \frac{3\cdot(-4)+5}{-4-3} = \frac{-7}{-7} = 1
\end{aligned}$$

問題の式の部分分数展開は，次のようになる．

$$\frac{3s+5}{s^2+s-12} = \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s+4}$$

ラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+s-12}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} + \frac{1}{s+4}\right\} \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\
&= 2\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-4t} \quad \cdots \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \mathrm{e}^{-at}$ の関係を用いた．

2) 問題の式は，次のように部分分数展開できる．

$$\frac{3s+4}{s^2+4s+4} = \frac{3s+4}{(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2}$$

係数 A, B は次のようにして決定できる．

上の式の両辺に $(s+2)^2$ をかけ，$s+2=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{3s+4}{(s+2)^2}(s+2)^2 &= \frac{A}{(s+2)^2}(s+2)^2 + \frac{B}{s+2}(s+2)^2 \quad \cdots \quad (1) \\
(3s+4)|_{s+2=0} &= [A + B(s+2)]|_{s+2=0} \\
A &= 3\cdot(-2)+4 = -2
\end{aligned}$$

式 (1) の両辺を s で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(3s+4) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[A+B(s+2)] \\ B &= 3\end{aligned}$$

問題の式の部分分数展開は，次のようになる．

$$\frac{3s+4}{s^2+4s+4} = \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}$$

ラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4}{s^2+4s+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}\right\} \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= -2\mathrm{e}^{-2t}t + 3\mathrm{e}^{-2t} \quad \cdots \quad (答)\end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^n}\right\} = \mathrm{e}^{-at}t^{n-1}/(n-1)!$，$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \mathrm{e}^{-at}$ の関係を用いた．

3) 問題の式は，次のように部分分数展開できる．

$$\frac{2s+4}{s^2+4s+13} = \frac{2s+4}{(s+2+3\mathrm{j})(s+2-3\mathrm{j})} = \frac{A}{s+2+3\mathrm{j}} + \frac{B}{s+2-3\mathrm{j}}$$

係数 A, B は次のようにして決定できる．

上の式の両辺に $(s+2+3\mathrm{j})$ をかけ，$s+2+3\mathrm{j}=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{2s+4}{(s+2+3\mathrm{j})(s+2-3\mathrm{j})}(s+2+3\mathrm{j}) &= \frac{A}{s+2+3\mathrm{j}}(s+2+3\mathrm{j}) + \frac{B}{s+2-3\mathrm{j}}(s+2+3\mathrm{j}) \\ \left.\frac{2s+4}{s+2-3\mathrm{j}}\right|_{s+2+3\mathrm{j}=0} &= \left.\left[A + \frac{B}{s+2-3\mathrm{j}}(s+2+3\mathrm{j})\right]\right|_{s+2+3\mathrm{j}=0} \\ A &= \frac{2\cdot(-2-3\mathrm{j})+4}{-2-3\mathrm{j}+2-3\mathrm{j}} = \frac{-6\mathrm{j}}{-6\mathrm{j}} = 1\end{aligned}$$

同様にして，$(s+2-3\mathrm{j})$ をかけ，$s+2-3\mathrm{j}=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{2s+4}{(s+2+3\mathrm{j})(s+2-3\mathrm{j})}(s+2-3\mathrm{j}) &= \frac{A}{s+2+3\mathrm{j}}(s+2-3\mathrm{j}) + \frac{B}{s+2-3\mathrm{j}}(s+2-3\mathrm{j}) \\ \left.\frac{2s+4}{s+2+3\mathrm{j}}\right|_{s+2-3\mathrm{j}=0} &= \left.\left[\frac{A}{s+2+3\mathrm{j}}(s+2-3\mathrm{j}) + B\right]\right|_{s+2-3\mathrm{j}=0} \\ B &= \frac{2\cdot(-2+3\mathrm{j})+4}{-2+3\mathrm{j}+2+3\mathrm{j}} = \frac{6\mathrm{j}}{6\mathrm{j}} = 1\end{aligned}$$

問題の式の部分分数展開は，次のようになる．

$$\frac{2s+4}{s^2+4s+13} = \frac{1}{s+2+3\mathrm{j}} + \frac{1}{s+2-3\mathrm{j}}$$

ラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{s^2+4s+13}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2+3\mathrm{j}} + \frac{1}{s+2-3\mathrm{j}}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2+3\mathrm{j}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2-3\mathrm{j}}\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-(2+3\mathrm{j})t} + \mathrm{e}^{-(2-3\mathrm{j})t} \\ &= \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}t} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}t}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t \quad \cdots \quad (答)\end{aligned}$$

ここで，$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2}$ と $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \mathrm{e}^{-at}$ の関係を用いた．

【解説】

1), 2), 3) は部分分数展開を用いて逆変換する問題．ただし，3) については，次のように変換表（教科書 p.15）の公式 7)，公式 8) を使う方が計算は簡単である．

（別解）問題の式を次のように変形する．

$$\frac{2s+4}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}$$

ラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{s^2+4s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right\} = 2\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t \quad \cdots \quad \text{(答)}$$

ここで，$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right\} = \mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$ の関係を用いた．

□

以下の点にも注意のこと．

※ラプラス変換に関する注意点．

1. （微分方程式中の）定数はステップ関数と同一視されるので，変換後の式には $\frac{1}{s}$ が現れる．
2. 逆変換 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \sin\omega t$ のときに，係数を ω だけ調整することを忘れないように．