2 課題 2(2016-05-06) 解答例

□**問題** 1.

1) 表 2.1（教科書 p.15）の公式 4) を，ラプラス変換の定義（式 (2.10)）に従い，積分計算を実行することにより導出しなさい．※ヒント：部分積分を 2 回行うと，求めるラプラス変換を含んだ式が出てくる．

2) 表 2.1 を使って，次の関数のラプラス変換を求めなさい：$\sin^2 \omega t$ （ω は定数)

3) 表 2.1 を使って，次の関数のラプラス変換を求めなさい：$\sin(\omega t + \alpha)$ （ω, α は定数)

(解答例)

1) 公式 4) は，$f(t) = \sin \omega t$．問題に従って，ラプラス変換の定義通りに積分計算を実行する．

定義に従ったラプラス変換の計算では，ラプラス変換が存在するならば $\lim_{t\to\infty} \cdot$ の項は 0 になる．解答例では，2 回目の部分積分で，この項を最初から 0 としている．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \int_0^\infty \sin \omega t \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \left[\sin \omega t \cdot \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \omega \cos \omega t \cdot \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[0 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{0}\right)\right] + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos \omega t \cdot \left(\mathrm{e}^{-st}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{s}\left[\cos \omega t \cdot \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty (-\omega \sin \omega t) \cdot \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{s}\left[0 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{0}\right)\right] - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \sin \omega t \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}
\end{aligned}$$

これを，$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}$ について解くと，

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \frac{\omega}{s^2} \\
\mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

最後の式は公式 4) そのものであり，題意は示された．

2)

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

より，

$$\mathcal{L}\left\{\sin^2 \omega t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2\omega t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4\omega^2}\right) \quad \cdots \quad (答)$$

3)

$$\sin(\omega t + \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$$

より，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \alpha)\} &= \mathcal{L}\{\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha\} = \cos \alpha \cdot \mathcal{L}\{\sin \omega t\} + \sin \alpha \cdot \mathcal{L}\{\cos \omega t\} \\
&= \cos \alpha \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \alpha \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s \sin \alpha + \omega \cos \alpha}{s^2 + \omega^2} \quad \cdots \quad (答)
\end{aligned}$$

【解説】

1) と同様にして公式 5) を計算すると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \int_0^\infty \cos\omega t\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \left[\cos\omega t\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\omega\sin\omega t)\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\cos\omega t\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right] - 1\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{0}\right) - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \sin\omega t\cdot\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\left[\sin\omega t\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \omega\cos\omega t\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\left[0 - 0\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{0}\right)\right] - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \cos\omega t\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}
\end{aligned}
$$

これを，$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}$ について解くと，

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \cdots \quad \text{公式 5)}
\end{aligned}
$$

1) については，教科書の方法の方が，計算量が少なく導出が容易である．教科書の方法による余弦関数（cos）のラプラス変換の導出は次の通り．

余弦関数はオイラーの公式を用いて，次のように表せる．

$$\cos\omega t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}$$

この式をラプラス変換すると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}+\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

□

2), 3) は，ラプラス変換表に載っている形に変形した後に，変換表を適用すればよい．特に 2) については，以下の 2 点に注意する．

- 一般に，時間関数の積のラプラス変換 $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\}$ は，時間関数のラプラス変換の積 $\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$ とは一致しない．したがって，$\mathcal{L}\left\{\sin^2\omega t\right\} = \left(\mathcal{L}\{\sin\omega t\}\right)^2$ という計算は**誤り**である．
- ラプラス変換においては，時間関数 $f(t)$ は $f(t)u(t)$ を意味する．このため，変換の際に，定数関数 $f(t)=1$ と単位ステップ関数 $u(t)$ は同一視される．

時間関数のラプラス変換の積 $\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$ については，**たたみ込み**を参照のこと．