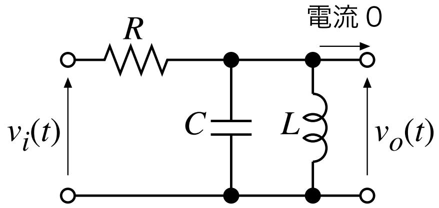
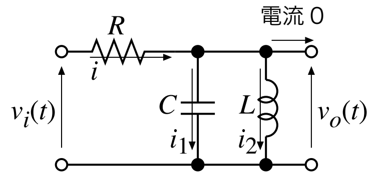
1　課題 1(2016-04-22) 解答例

□**問題** 1.　図に示す電気系の振る舞いを記述する微分方程式（入力電圧 $v_i(t)$ に対する出力電圧 $v_o(t)$ を表す微分方程式）を求めなさい．ただし，出力端子は電圧だけを観測し，電流は流さないものとする．



(解答例) 右図のように電流 $i(t), i_1(t), i_2(t)$ をとると，次式が成り立つ．



$$
\begin{aligned}
&v_i(t) = Ri(t) + v_o(t) \\
&v_o(t) = \frac{1}{C}\int i_1(t)\mathrm{d}t = L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \\
&i(t) = i_1(t) + i_2(t)
\end{aligned}
$$

これらの式から電流 $i(t), i_1(t), i_2(t)$ を消去して，

$$
v_i(t) = Ri_1(t) + Ri_2(t) + v_o(t) = RC\frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\int v_o(t)\mathrm{d}t + v_o(t)
$$

これを整理して，求める微分方程式は次のようになる．

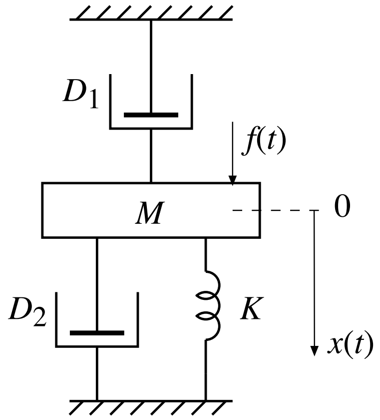
$$
\frac{\mathrm{d}^2 v_o(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v_o(t) = \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} \quad \cdots \quad (答)
$$

整理：積分を消して微分だけの式にし，左辺に出力を含む項，右辺には入力を含む項を集める．各辺の項は，微分の階数の大きい方から並べる．

【解説】

簡単な電気系の微分方程式を求める問題である．教科書の演習問題 7(p.34) に同様の例がある．

□**問題** 2. 図に示す機械系の振る舞いを記述する微分方程式（外力 $f(t)$ に対する物体の変位 $x(t)$ を表す微分方程式）を求めなさい．ただし，図の M は質量，D_1, D_2 はダンパの粘性摩擦係数，K はバネ定数である．なお，質量 M は鉛直方向にのみ運動し，ダンパとバネについてはその質量を無視できるものとする．



(解答例) 外力を加えず物体が静止しているときの位置 (釣り合いの位置) を変位 $x(t)$ の原点とし，鉛直下方を変位の正の向きとする．また，鉛直下方を力の正の向きとし，図の物体に加わる合力を F_r とおく．このとき，物体に加わる力は次の 4 つである．

- 外力：$f(t)$
- バネからの力 (フックの法則)：$-Kx(t)$
- ダンパからの力 (粘性抵抗)：$-D_1\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$，$-D_2\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$

合力 F_r は，

$$F_r = f(t) - Kx(t) - (D_1 + D_2)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

したがって，物体に関するニュートンの運動方程式 (運動の第 2 法則) は，

$$\begin{aligned} F_r &= M\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ f(t) - Kx(t) - (D_1 + D_2)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= M\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

となる．これを整理して，求める微分方程式は次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D_1 + D_2}{M}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t) \quad \cdots \quad (答)$$

【解説】

簡単な機械系の微分方程式を求める問題である．教科書の例題 (pp.27–28) に同様の例がある．