「制御工学」第１１回

フィードバックの意義
フィードバックの有無による伝達関数の違い
安定性
ラウスの安定判別法
ラウスの安定判別法：例題
（2016-07-01）

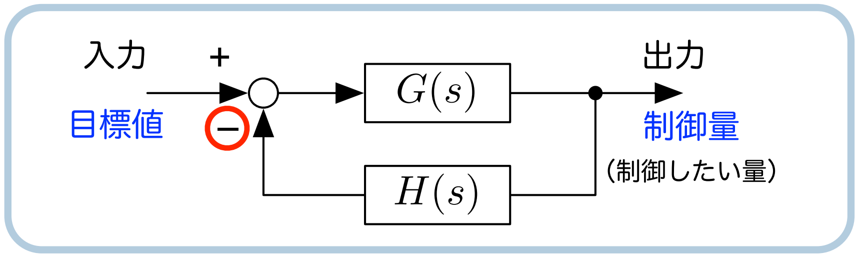
鹿児島大学・工・電気電子　田中哲郎

フィードバックの意義

フィードバック制御系の伝達関数（復習）
フィードバック制御系の典型例（教科書p.74）
制御系に対する一般的な要求

フィードバック制御系の伝達関数（復習）

〈フィードバック制御系〉

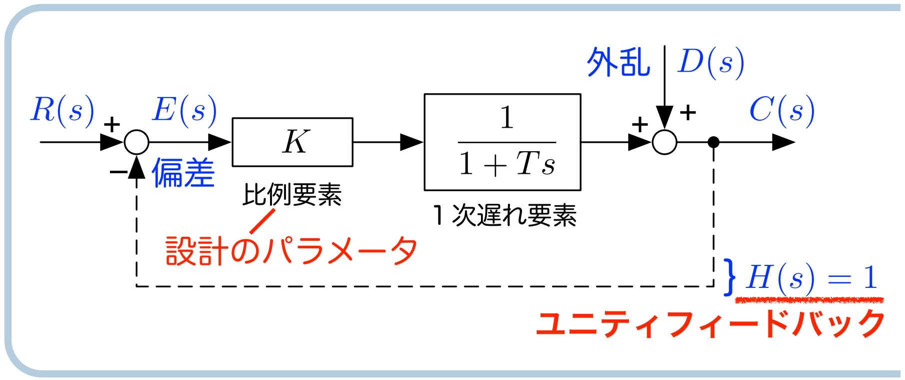


$$（全体の伝達関数）= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$（全体の伝達関数）= \frac{（前向き経路伝達関数）}{1 + （一巡伝達関数）}$$

フィードバック制御系の典型例（教科書p.74）

〈図5.1：比例要素＋１次遅れ要素〉



外乱 $D(s)$ …… 入力の一種．制御を乱す．
※基本的に人間が関与できない．

制御系に対する一般的な要求

★•目標値に速やかに到達する …… 応答性

•目標値に精度よく到達する …… 定常偏差

•制御対象の特性変化に強い …… 感度

製造時のばらつき，経年変化，環境変化（温度など）

★•外乱の影響を受けにくい …… 感度

フィードバック制御によって達成可能
＝フィードバック制御の意義（使用理由）

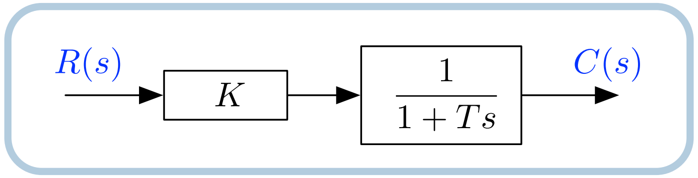
フィードバックの有無による伝達関数の違い

i) 目標値に対する伝達関数（開ループ）
ii) 目標値に対する伝達関数（閉ループ）
iii) 外乱に対する伝達関数（開ループ）
iv) 外乱に対する伝達関数（閉ループ）
フィードバックの効果（まとめ）

i) 目標値に対する伝達関数（開ループ）

$D(s) = 0$　　フィードバックなし

〈ブロック線図〉



〈伝達関数〉

直流ゲイン

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1+Ts}$$

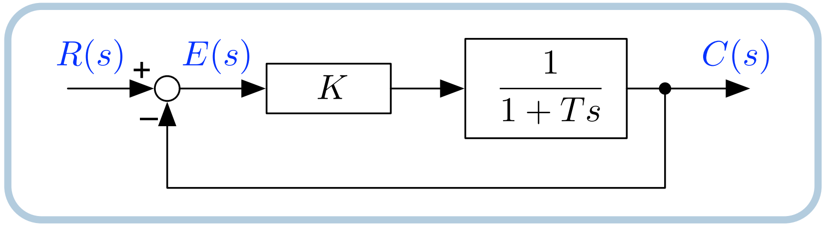
時定数

線形システムの出力は，
各入力に対する出力の
重ね合わせ

ii) 目標値に対する伝達関数（閉ループ）

$D(s) = 0$　　フィードバックあり

〈ブロック線図〉



〈伝達関数〉

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{1+Ts}}{1+\frac{K}{1+Ts}} = \frac{K}{1+K+Ts}$$

$$= \frac{K}{1+K} \cdot \frac{1}{1+\frac{T}{1+K}s}$$

直流ゲイン　時定数

※時定数の変化

$$T \longrightarrow \frac{T}{1+K}$$

第10回

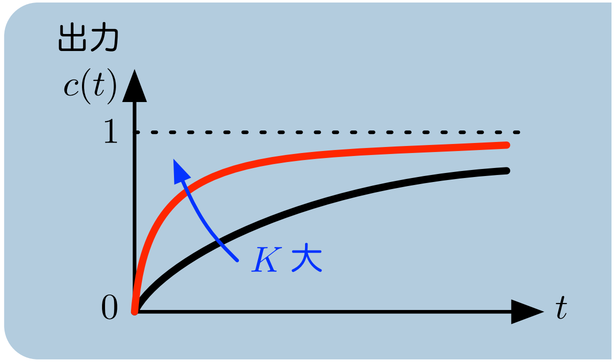
ii) 目標値に対する伝達関数（閉ループ）

ステップ応答

入力

$r(t) = u(t)$

$R(s) = \dfrac{1}{s}$

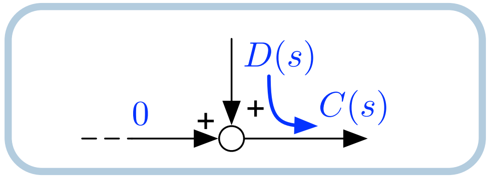


※フィードバックにより，制御系の応答性が改善

iii) 外乱に対する伝達関数（開ループ）

$R(s) = 0$　　フィードバックなし

〈ブロック線図〉



〈外乱の寄与分〉

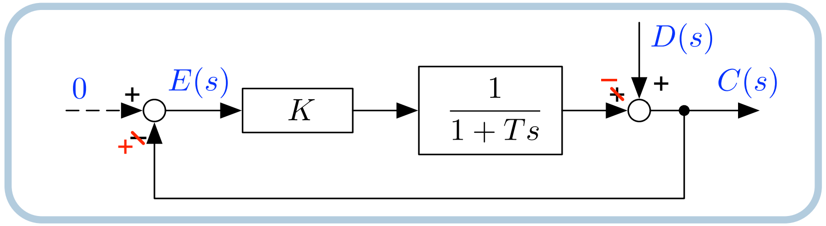
$$C(s) = D(s)$$

… 伝達関数
1

ii) 目標値に対する伝達関数（閉ループ）

$R(s) = 0$　　フィードバックあり

〈ブロック線図〉



〈伝達関数〉

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{1+Ts}}$$

※フィードバックにより，
外乱が抑圧される．

〈外乱の寄与分〉　感度関数

$$C(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{1+Ts}} D(s)$$

$$= \frac{1}{1+K} \cdot \frac{1+Ts}{1 + \frac{T}{1+K}s} D(s)$$

フィードバックの効果（まとめ）

ゲイン K を大きくすると…

フィードバックの利点

- 入力に対する**応答性**が改善
- （制御の精度が向上：定常偏差）
- （特性変化の影響が低減：感度）
- 外乱に対する**感度**が低減

欠点

- 一般的な傾向として，安定性が悪化

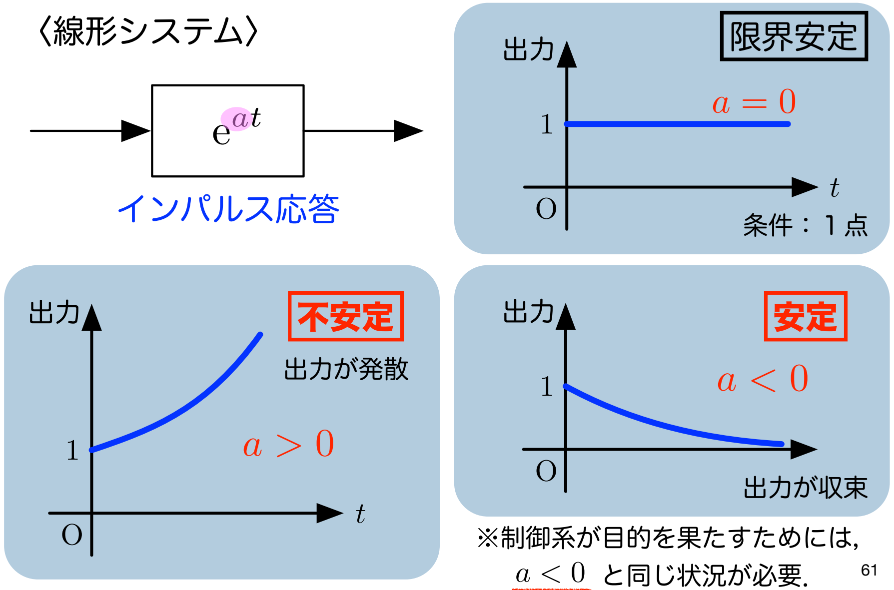
遠心調速機のハンチング現象

安定性

安定と不安定
伝達関数から見た安定と不安定
安定判別法

安定と不安定

〈線形システム〉

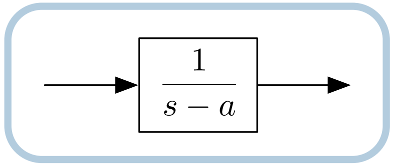


※制御系が目的を果たすためには，
$a<0$ と同じ状況が必要．

伝達関数から見た安定と不安定

〈伝達関数〉

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$$



実際のシステム … s の有理多項式

$$\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (n>m)$$

教科書p.19
式(2・47)

⇩ 部分分数展開

$$\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

伝達関数の極：$s = p_1, p_2, \ldots, p_n$

伝達関数から見た安定と不安定

１つでも発散すると不安定になるから，安定であるためには，

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\{p_1\} < 0 \\ \mathrm{Re}\{p_2\} < 0 \\ \vdots \\ \mathrm{Re}\{p_n\} < 0\end{gathered}$$

↑

特性方程式の実根，複素共役根

まとめ

制御系が安定であるためには，

伝達関数のすべての極について，
$\mathrm{Re}\{p_k\} < 0$

||

伝達関数のすべての極が左半平面に存在する

安定判別法

具体的に極を求めることなく，安定かどうかの判定を行う．

★ (1)ラウスの安定判別法
- 特性方程式
- ラウスの数表（ラウス表）を作成

(2)フルビッツの安定判別法
- 特性方程式
- 行列式（首座小行列式）の計算

★ (3)ナイキストの安定判別法
- 一巡伝達関数
- ナイキスト線図を作図

数学的に同等

図的手法

ラウスの安定判別法

特性方程式
安定であるための条件
ラウスの数表
ラウスの数表の計算（３行目以降）

特性方程式

特性方程式 …… この解（特性方程式の根＝特性根）が，伝達関数の極

〈定義〉

（伝達関数の分母） = 0

⇩ フィードバック制御系では

1 + （一巡伝達関数） = 0

〈特性方程式〉

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

※これまでの説明とは，係数のつけ方が異なる．

安定であるための条件

〈特性方程式〉

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

係数

(1)係数がすべて存在し，すべて同符号であること．　0ではない

必要条件

- クイック判定
  - 条件を満たさない場合 → 不安定
  - 条件を満たす場合 → 判定できない

(2)係数からラウスの数表を作り，表の第１列の符号が等しいこと．　最左列

正か負（0は別扱い）

必要十分条件

ラウスの数表

〈特性方程式〉

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

係数

s^n	a_0	a_2	a_4	$\cdots$	a_n
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$\cdots$	0
s^{n-2}	$\frac{a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3}{a_1}$	$\frac{a_1 \times a_4 - a_0 \times a_5}{a_1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
s^1	$\cdots$	$\cdots$			
s^0	a_n ← 定数項に一致				

第１列

※表の外側は0で埋まっている．

ラウスの数表の計算（３行目以降）

s^{k+1}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^k	A	① B	B'	B''	$\cdots$
s^{k-1}	C	② D	D'	D''	$\cdots$
s^{k-2}	$\frac{C \times B - A \times D}{C}$	$\frac{C \times B' - A \times D'}{C}$	$\frac{C \times B'' - A \times D''}{C}$	$\cdots$	$\cdots$
s^{k-3}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

s^{k+1}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^k	A	B	① B'	B''	$\cdots$
s^{k-1}	C	D	② D'	D''	$\cdots$
s^{k-2}	$\frac{C \times B - A \times D}{C}$	$\frac{C \times B' - A \times D'}{C}$	$\frac{C \times B'' - A \times D''}{C}$	$\cdots$	$\cdots$
s^{k-3}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ラウスの安定判別法：例題

例題（教科書p.80）

例題（教科書pp.80--81）

例題（教科書p.82）

例題（教科書p.80）

〈特性方程式〉 $5\,s^3 + 6\,s^2 + 6\,s + 2 = 0$

〈安定判別〉

i) クイック判定の条件（必要条件）を満たす.

→　安定性に関しては何も言えない.

ii) ラウスの数表

s^3	5	6	0
s^2	6	2	0
s^1	$\frac{6 \times 6 - 5 \times 2}{6} = \frac{13}{3}$	$\frac{6 \times 0 - 5 \times 0}{6} = 0$	
s^0	$\frac{\frac{13}{3} \times 2 - 6 \times 0}{\frac{13}{3}} = 2$		

第１列（最左列）は，すべて同符号

→ **安定**

例題（教科書pp.80--81）

〈特性方程式〉 $s^4 + s^3 + s^2 + 6\,s + 12 = 0$

1　1　1

〈安定判別〉

i) クイック判定の条件（必要条件）を満たす.

ii) ラウスの数表

s^4	1	1	12	0
s^3	1	6	0	0
s^2	$\frac{1\times1-1\times6}{1}=-5$	$\frac{1\times12-1\times0}{1}=12$	0	
s^1	$\frac{-5\times6-1\times12}{-5}=\frac{42}{5}$	0		
s^0	$\frac{\frac{42}{5}\times12-5\times0}{\frac{42}{5}}=12$			

第１列に異符号のものを含む

→ **不安定**

不安定根の（$\mathrm{Re}\{a\}>0$）個数は２個（符号変化の回数）

例題（教科書p.82）

〈一巡伝達関数〉

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2+2s+4)}$$

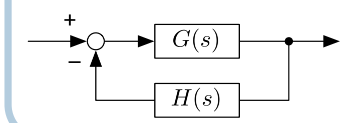
K：制御のパラメータ

※安定になるようにKを選択する.

〈全体の伝達関数〉

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+\frac{K}{s(s^2+2s+4)}}$$

ブロック線図の一例



〈特性方程式〉

$$1+\frac{K}{s(s^2+2s+4)} = 0$$

$$s^3 + 2\,s^2 + 4\,s + K = 0$$ → 安定判別は各自で

1