「制御工学」第５回

4. ラプラス逆変換（続き）
5. たたみ込み
6. 伝達関数（板書）
7. ラプラス変換の応用（板書）

（2016-05-20）

鹿児島大学・工・電気電子　田中哲郎

4. ラプラス逆変換（続き）

部分分数展開（重根の場合）
公式 9) の逆変換

(3) 部分分数展開（重根の場合）

$\boxed{p_1 = p_2 \text{のとき}}$　$D(s) = (s-p_1)^2$　定数

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2} = \frac{A_1}{(s-p_1)^2} + \frac{A_2}{s-p_1}$$

s に関する恒等式　部分分数展開の形が異なる

◎ $A_1,\ A_2$ の決め方

(1) 両辺に $(s-p_1)^2$ をかける

$$b_1 s + b_0 = A_1 + A_2(s-p_1)$$

(2) $s - p_1 = 0$ とおく

$$A_1 = b_1 p_1 + b_0$$

$\mathcal{L}^{-1}$ … 線形性
変換表

$$A_1 t e^{p_1 t} + A_2 e^{p_1 t}$$

逆変換の結果

(3) 部分分数展開（重根の場合）

$\boxed{p_1 = p_2 \text{のとき}}$

◎ $A_1,\ A_2$ の決め方（続き）

(3) 両辺に $s - p_1$ をかける

$$\cancel{\frac{b_1 s + b_0}{s-p_1} = \frac{A_1}{s-p_1} + A_2}$$

~~(4) $s - p_1 = 0$ とおく~~
⇒ おけない

(3)' (1) の結果の両辺を s で微分

くりかえす

$$b_1 = A_2$$

$n = 2$ のとき
はこれで終了

(4)' $s - p_1 = 0$ とおく

公式 9) の逆変換

公式 9)

$$\mathcal{L}\left\{t^n e^{-at}\right\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n e^{-at}}{n!}\right\} = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{(s+a)^{n}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s-p_1)^2}\right\} = A_1 \frac{t^{2-1} e^{p_1 t}}{(2-1)!} = A_1 t e^{p_1 t}$$

練習

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s-p_1)^3}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s-p_1)^4}\right\}$$

5. たたみ込み（資料 doc-1）

たたみ込み（合成積）の定義
フーリエ変換におけるたたみ込み
ラプラス変換におけるたたみ込み

たたみ込み（まとめ）

〈定義〉

資料 doc-1 を参照

〈性質〉

※ たたみ込みは積の性質を持つ（合成積）

$$f * g = g * f \qquad (f * g) * h = f * (g * h)$$

※ たたみ込みのラプラス変換は，
それぞれの関数のラプラス変換の積

$$\mathcal{L}\{f \underset{\text{合成積}}{*} g\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \underset{\text{四則の積}}{\cdot} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

おしまい