「制御工学」第４回

3. ラプラス変換の諸定理（続き）
4. ラプラス逆変換

（2016-05-11, 補講）

鹿児島大学・工・電気電子　田中哲郎

3. ラプラス変換の諸定理（続き）

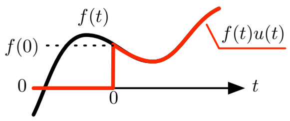
時間領域の推移則
時間微分のラプラス変換
時間積分のラプラス変換
（時間微分・時間積分のラプラス変換）
初期値の定理
最終値の定理

定理 c) 時間領域の推移則 要注意

変数 t

２種類ある ・遅れ 教科書 ・進み

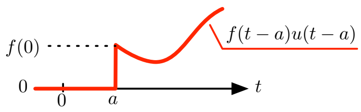
遅れ



右へ移動 $(a>0)$

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ のとき
$\mathcal{L}\{f(t-a)\}=\mathrm{e}^{-as}F(s)$



ラプラス変換

※ ラプラス変換で扱う
時間関数は，$f(t)u(t)$

時間領域の推移則

遅れ 右へ移動 $(a>0)$

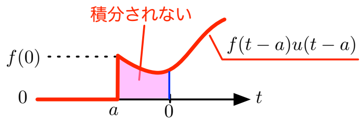
$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ のとき
$\mathcal{L}\{f(t-a)\}=\mathrm{e}^{-as}F(s)$

※ むだ時間要素
※ ディジタル制御 -- z変換

進み 左へ移動 $(a<0)$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\}\cancel{=}\mathrm{e}^{-as}F(s)$
$(a<0)$

成立しない
※積分されない部分
の補正項が必要



ラプラス変換

定理 e) 時間微分のラプラス変換

〈定理：１階〉

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ のとき

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sF(s)-f(0)$$

初期値

$$f(0)=f(t)\Big|_{t=0}$$

条件

$$f'(0)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=0}$$

(1) 微分
(2) $t=0$

〈２階〉

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

初期値　初期値

定理 f) 時間積分のラプラス変換

〈定理：１階〉

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ のとき

１階積分

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)\,\mathrm{d}t\right\}=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$$

初期値

$f^{(\circ)}$
微分の階数

※ 特に必要のない限り，積分を微分に直して，
微分の変換を行った方が良い．（積分より微
分の計算が簡単なため）

時間微分・時間積分のラプラス変換

◎ 微分・積分の変換において初期値を無視すると,

- 時間微分 --- かける s
- 時間積分 --- わる s

逆の操作

交流理論のフェーザ

$\mathrm{j}\omega$ ⟺ s

フーリエ変換 ← 兄弟関係 → ラプラス変換

$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

定理 g) 初期値の定理

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ のとき

$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

初期値 $f(0)$

※ **最終値の定理**と形の上で対応

※ 通常，適用条件を考慮する必要はない

※ $f(t)$の式が分からなくても，$F(s)$から初期値が計算できる．

逆変換せずに

定理 h) 最終値の定理 **要注意**

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ のとき

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

最終値 $f(\infty)$

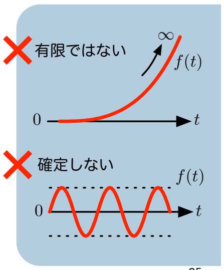
※ **初期値の定理**と形の上で対応

※ 適用条件**あり**

〈適用条件：時間領域〉

最終値 $f(\infty)$ が存在する

… $\lim_{t\to\infty} f(t)$ が有限確定値をとる



最終値の定理の適用条件

※ $f(t)$の式が分からなくても，$F(s)$から最終値が計算できる．

逆変換せずに

〈適用条件：複素領域〉

$sF(s)$ の極がすべて左半平面に存在する

$sF(s)$を無限大にするような s の値

s 平面（複素平面）

※ 適用条件に安定判別の考え方が使える．

最終値の定理が適用できない例

$f(t) = \sin\omega t,\ F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ のとき

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \sin\omega t$ … 確定（収束）しない

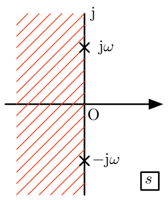
$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} = 0$

一致しない

◎ $sF(s)$の極 … $s^2+\omega^2 = 0$

$s = \pm\mathrm{j}\omega$

最終値は存在しない



4. ラプラス逆変換

ラプラス逆変換の概要
逆変換公式
部分分数展開（単根の場合）

ラプラス逆変換の概要

(順)変換　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

逆，インバース

逆変換　$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

〈逆変換の方法〉

★(1) 逆変換公式（複素反転積分）

(2) ヘビサイドの展開定理＋変換表

★(3) 部分分数展開＋変換表

同じ

(1) 逆変換公式

〈ラプラス逆変換〉

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s$$

虚数単位

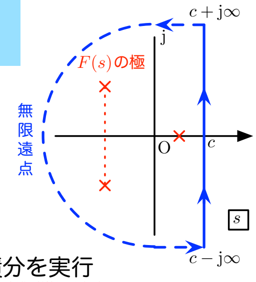
s：複素変数

$c - \mathrm{j}\infty \sim c + \mathrm{j}\infty$：積分路

$\mathrm{Re}\{s\} \geq c$ で $F(s)$ が正則

となるように c を選んで複素積分を実行

留数定理



(3) 部分分数展開

〈制約〉

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (n > m)$$

厳密にプロパー

※多くの物理システムがこの形の $F(s)$ をもつ．

$\boxed{n = 2 \text{で説明}}$ … $m = 1$ または $m = 0$

$$D(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)$$

p_1, p_2：極，根

単根（単極）
異なる2実根
複素共役根
重根（重極）

(3) 部分分数展開（単根の場合）

$\boxed{p_1 \neq p_2 \text{のとき}}$　s に関する恒等式　定数

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}$$

部分分数展開

◎ A_1, A_2 の決め方

・両辺に　$s - p_1$ をかける

$$\frac{b_1 s + b_0}{s - p_2} = A_1 + \frac{A_2}{s - p_2}(s - p_1)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ … 線形性
変換表

$$A_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{p_2 t}$$

逆変換の結果

(3) 部分分数展開（単根の場合）

$\boxed{p_1 \neq p_2 \text{のとき}}$

◎ A_1, A_2 の決め方（続き）

・ $s - p_1 = 0$ とおく

⇔　$s = p_1$とおく

$$\frac{b_1 p_1 + b_0}{p_1 - p_2} = A_1$$

・同様に A_2 を決める

$$\frac{b_1 p_2 + b_0}{p_2 - p_1} = A_2$$

※ $p_1 \neq p_2$ が必要

※ p_1, p_2 は複素共役根

でも構わない

$$p_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$$
$$p_2 = \alpha - \mathrm{j}\beta$$

オイラーの公式で処理

$$\mathrm{e}^{p_1 t} = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{j}\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta t}$$

逆変換の結果

※最終的に虚部は消える