

# 「制御工学」第4回

- 3. ラプラス変換の諸定理 (続き)
- 4. ラプラス逆変換

(2016-05-11, 補講)

# 3. ラプラス変換の諸定理 (続き)

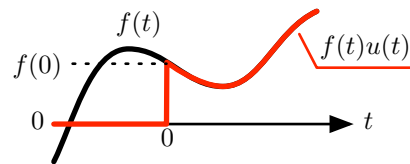
- 時間領域の推移則
- 時間微分のラプラス変換
- 時間積分のラプラス変換
- (時間微分・時間積分のラプラス変換)
- 初期値の定理
- 最終値の定理

## 定理 c) 時間領域の推移則 **要注意**

変数  $t$

**遅れ**

2種類ある {  
 ・遅れ 教科書  
 ・進み

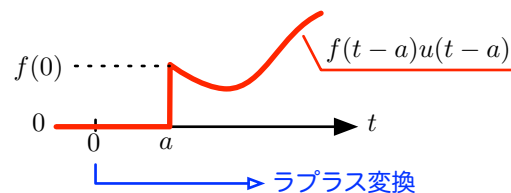


〈定理〉

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ のとき}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

右へ移動 ( $a > 0$ )



※ ラプラス変換で扱う  
 時間関数は,  $f(t)u(t)$

## 時間領域の推移則

**遅れ** 右へ移動 ( $a > 0$ )

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  のとき

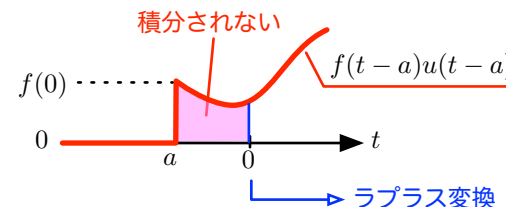
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

※ むだ時間要素

※ デジタル制御 -- z変換

**進み** 左へ移動 ( $a < 0$ )

~~$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$~~   
~~( $a < 0$ )~~



**成立しない**

※ 積分されない部分  
 の補正項が必要

## 定理 e) 時間微分のラプラス変換

〈定理：1階〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  のとき

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - \underline{f(0)}$$

初期値

$$f(0) = f(t)\Big|_{t=0}$$

条件

$$f'(0) = \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

〈2階〉

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - \underline{sf(0)} - \underline{f'(0)}$$

初期値 初期値

(1) 微分

(2)  $t = 0$

21

## 定理 f) 時間積分のラプラス変換

〈定理：1階〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  のとき

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \underline{f^{(-1)}(0)}$$

1階積分  
初期値

$f^{(0)}$   
微分の階数

※ 特に必要のない限り、積分を微分に直して、微分の変換を行った方が良い。（積分より微分の計算が簡単のため）

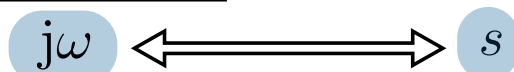
22

## 時間微分・時間積分のラプラス変換

◎ 微分・積分の変換において初期値を無視すると、

$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{時間微分} \text{ --- かける } s \\ \cdot \text{時間積分} \text{ --- わる } s \end{array} \right.$ 
} 逆の操作

交流理論のフェーザ



フーリエ変換  $\longleftrightarrow$  ラプラス変換

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

23

## 定理 g) 初期値の定理

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  のとき

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

初期値  $f(0)$

※ 最終値の定理と形の  
 上で対応  
 ※ 通常、適用条件を考  
 慮する必要はない

※  $f(t)$ の式が分からなくても、 $F(s)$ から初期値が計算できる。

逆変換せずに

24

# 定理 h) 最終値の定理

**要注意**

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

最終値  $f(\infty)$

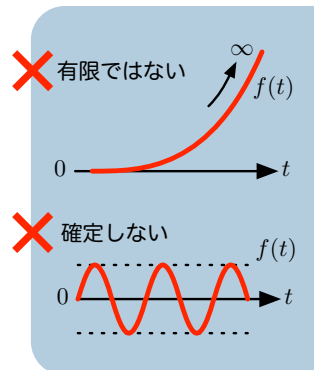
〈適用条件：時間領域〉

最終値  $f(\infty)$  が存在する

…  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  が有限確定値をとる

※ 初期値の定理と形の  
上で対応

※ 適用条件あり



# 最終値の定理の適用条件

※  $f(t)$  の式が分からなくても,  $F(s)$  から最終値が計算できる.

逆変換せずに

〈適用条件：複素領域〉

$sF(s)$  の極がすべて左半平面に存在する

$sF(s)$  を無限大にする

$s$  平面 (複素平面)

ような  $s$  の値

※ 適用条件に安定判別の考え方が使える.

# 最終値の定理が適用できない例

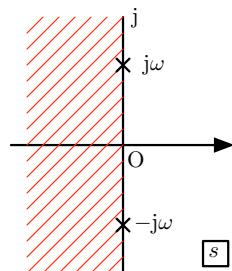
$f(t) = \sin \omega t, F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$  のとき

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sin \omega t \dots \text{確定 (収束) しない} \\ \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = 0 \end{array} \right. \text{一致しない}$$

◎  $sF(s)$  の極 …  $s^2 + \omega^2 = 0$

$s = \pm j\omega$

最終値は存在しない



# 4. ラプラス逆変換

ラプラス逆変換の概要  
逆変換公式  
部分分数展開 (単根の場合)

# ラプラス逆変換の概要

(順)変換  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

逆, インバース

逆変換  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

〈逆変換の方法〉

★(1) 逆変換公式 (複素反転積分)

(2) ヘビサイドの展開定理+変換表

★(3) 部分分数展開+変換表

同じ

# (1) 逆変換公式

〈ラプラス逆変換〉

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

虚数単位

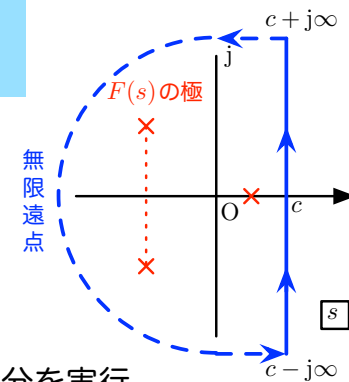
$s$  : 複素変数

$c - j\infty \sim c + j\infty$  : 積分路

$\text{Re}\{s\} \geq c$  で  $F(s)$  が正則

となるように  $c$  を選んで複素積分を実行

留数定理



# (3) 部分分数展開

〈制約〉

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (n > m)$$

厳密にプロパー

※ 多くの物理システムがこの形の  $F(s)$  をもつ。

$n = 2$  で説明 ...  $m = 1$  または  $m = 0$

$$D(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)$$

$p_1, p_2$  : 極, 根

単根 (単極)  
異なる2実根  
複素共役根  
重根 (重極)

# (3) 部分分数展開 (単根の場合)

$p_1 \neq p_2$  のとき

$s$  に関する恒等式 定数

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}$$

部分分数展開

◎  $A_1, A_2$  の決め方

・両辺に  $s - p_1$  をかける

$$\frac{b_1 s + b_0}{s - p_2} = A_1 + \frac{A_2}{s - p_2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$  ... 線形性  
変換表

$$A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

逆変換の結果

### (3) 部分分数展開 (単根の場合)

$p_1 \neq p_2$  のとき

◎  $A_1, A_2$  の決め方 (続き)

- $s - p_1 = 0$  とおく  
⇔  $s = p_1$  とおく

$$\frac{b_1 p_1 + b_0}{p_1 - p_2} = A_1$$

- 同様に  $A_2$  を決める

$$\frac{b_1 p_2 + b_0}{p_2 - p_1} = A_2$$

※  $p_1 \neq p_2$  が必要

※  $p_1, p_2$  は複素共役根  
でも構わない

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha + j\beta \\ p_2 &= \alpha - j\beta \end{aligned}$$

オイラーの公式で処理

$$e^{p_1 t} = e^{(\alpha + j\beta)t} = e^{\alpha t} e^{j\beta t}$$

逆変換の結果

※ 最終的に虚部は消える