# 「制御工学」第３回

1. ラプラス変換
2. 主要な時間関数のラプラス変換
3. ラプラス変換の諸定理

（2016-05-06）

鹿児島大学・工・電気電子　田中哲郎



# 1. ラプラス変換

古典制御理論とラプラス変換
線形性
ラプラス変換の定義
ラプラス変換の線形性と一意性



# 古典制御理論とラプラス変換

**定係数線形微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_m\frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 x(t) \quad (1.1)$$

$(n \geq m)$ プロパー

ラプラス変換 ⇩

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1}s^{m-1}X(s) + \cdots + b_1 sX(s) + b_0 X(s)$$

**伝達関数**

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

微分，積分
↓
代数（四則）



# 線形性（定義）

〈定義〉

(1) 同次性（斉次性）

$L(cx) = cL(x) = cy$

$c$：定数

$x \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y$

線形システム

$y = L(x)$

(2) 加法性

$y_1 = L(x_1), y_2 = L(x_2)$ のとき，

$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) = y_1 + y_2$

線形の例
- 比例 $y = ax$
- 微分 $y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
- 積分 $y = \int_0^t x\mathrm{d}t$

※線形…重ね合わせの原理が成り立つ．



# ラプラス変換（定義）

〈定義〉

時間関数 $f(t)$ に対して

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

f(t)のラプラス変換　時間の原点

時間関数 $f(t)$
…信号，変数
〇〇量，〇〇値

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

筆記体
エルの大文字 $\mathcal{L}$

ラプラス変換
- f(t)からF(s)を求めること Laplace transformation
- F(s)…ラプラス変換の結果 Laplace transform



# 性質(a)　ラプラス変換の線形性

- 定義より明らか．
  - **積分の線形性**がそのまま引き継がれるため．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

- **定数倍，和と差**は容易に処理できる．

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ のとき
$\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\} = cF(s)$　（$c$：定数）

$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ のとき
$\mathcal{L}\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s) \pm F_2(s)$
（複号同順）

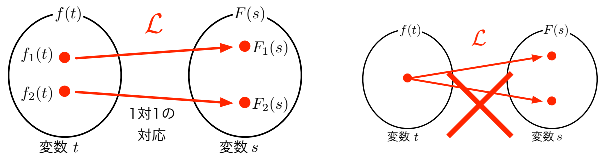
# ラプラス変換の一意性

ただ1つに決まる

〈一意性〉

$F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}, F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ のとき,

$F_1(s) \neq F_2(s)$ ならば $f_1(t) \neq f_2(t)$




※一意性により，方程式のラプラス変換が可能になる．



# 2. 主要な時間関数のラプラス変換

単位ステップ関数
ラプラス変換運用の基本方針
単位インパルス関数
べき関数



# 変換表　公式2) u(t)

〈定義〉

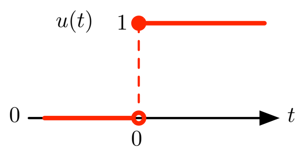
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

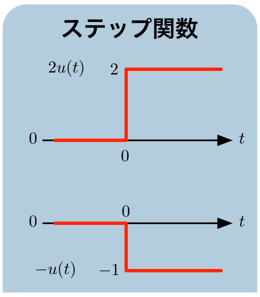
単位

単位ステップ関数

大きさ1　階段

ヘヴィサイド関数






# 公式2) 単位ステップ関数 u(t)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty 1 \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \quad \leftarrow \text{定数1のラプラス変換} \\ &= \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty \\ &= \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)}_{0} - \left(-\frac{1}{s}\overset{1}{\mathrm{e}^{-s\cdot 0}}\right) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

※ラプラス変換では，
ステップ関数と定数は同一視される．

p.15, 表2.1
公式2) に追加
u(t), 1



# ラプラス変換運用の基本方針

**変換表 -- 教科書p.15，表2.1**

(1)変換／逆変換は変換表を活用

・公式1)〜6)は覚える

(2)定理との組み合わせ

・公式4)〜6) ⇒ 公式7)〜9)

(3)定義通りの積分計算

・どうしても必要な場合のみ（通常はやらない）



# 変換表　公式1) δ(t)

〈定義〉

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

$f(t)$：任意の関数

単位インパルス関数

1　衝撃

ディラックのデルタ関数

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

← 形式的な書き方

$f(t) = 1$ のとき

単位

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad (2.14)$$

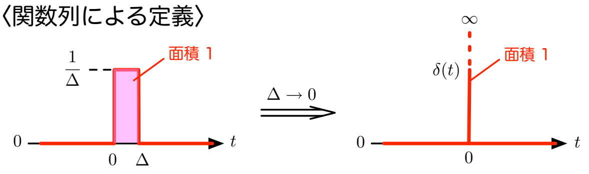
# 単位インパルス関数 δ(t)

※δ(t)は積分の中で意味を持つ.

※δ(t)は普通の関数ではない.

分布（distribution），超関数（hyperfunction）

〈関数列による定義〉




$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ … ラプラス変換における最も基本的な時間関数



# 公式6)　$t^n$ （nは自然数）

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt \\ &= \underbrace{\left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty \left(-\frac{n}{s}t^{n-1}\right)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} \\ &= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} \\ &= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{\mathcal{L}\{\overset{1}{t^0}\}}_{1/s} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

$0! = 1$ と約束すれば，$n = 0$ でも成立

↓

定数1のラプラス変換に帰着



# 3. ラプラス変換の諸定理

複素領域の推移則



# 定理 d) 複素領域の推移則

変数 s　　平行移動 シフト $s \to s-a$

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ のとき

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$s \to s-a$ に書き換え

公式4) → 公式7)
公式5) → 公式8)
公式6) → 公式9)

公式10)は公式7)のバリエーション

例）公式4) → 公式7)

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin\omega t\} = F(s+a) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$