「制御工学」第３回

1. ラプラス変換
2. 主要な時間関数のラプラス変換
3. ラプラス変換の諸定理

(2016-05-06)

鹿児島大学・工・電気電子　田中哲郎

1. ラプラス変換

古典制御理論とラプラス変換
線形性
ラプラス変換の定義
ラプラス変換の線形性と一意性

古典制御理論とラプラス変換

定係数線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) \qquad (1.1)$$

$$= b_m\frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 x(t)$$

$(n \geq m)$ プロパー

ラプラス変換

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + a_1 sY(s) + a_0 Y(s)$$

$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1}s^{m-1}X(s) + \cdots + b_1 sX(s) + b_0 X(s)$$

伝達関数

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

微分，積分
↓
代数（四則）

線形性（定義）

〈定義〉

(1) 同次性（斉次性）

$$L(cx) = cL(x) = cy$$

c : 定数

$$y = L(x)$$

(2) 加法性

$y_1 = L(x_1), y_2 = L(x_2)$ のとき,

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) = y_1 + y_2$$

線形の例

・比例
$y = ax$

・微分
$y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

・積分
$y = \int_0^t x\,\mathrm{d}t$

※線形…重ね合わせの原理が成り立つ.

ラプラス変換（定義）

〈定義〉

時間関数 $f(t)$ に対して

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

f(t)のラプラス変換　時間の原点

時間関数 $f(t)$

…信号，変数

○○量，○○値

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

筆記体
エルの大文字 $\mathcal{L}$

ラプラス変換

・f(t)からF(s)を求めること
Laplace transformation

・F(s)…ラプラス変換の結果
Laplace transform

性質(a)　ラプラス変換の線形性

- 定義より明らか.
  - **積分の線形性**がそのまま引き継がれるため.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

- **定数倍，和と差**は容易に処理できる.

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ のとき

$$\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\} = cF(s) \quad (c\text{：定数})$$

$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ のとき

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s) \pm F_2(s)$$

（複号同順）

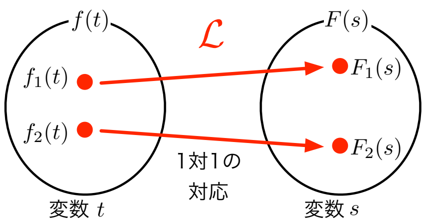
ラプラス変換の一意性

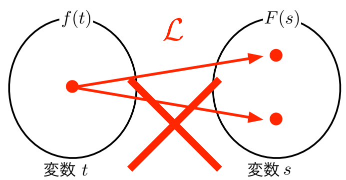
ただ1つに決まる

〈一意性〉

$F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}, F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ のとき,

$F_1(s) \neq F_2(s)$　ならば　$f_1(t) \neq f_2(t)$





※一意性により，方程式のラプラス変換が可能になる.

2. 主要な時間関数のラプラス変換

単位ステップ関数
ラプラス変換運用の基本方針
単位インパルス関数
べき関数

変換表　公式2) u(t)

〈定義〉

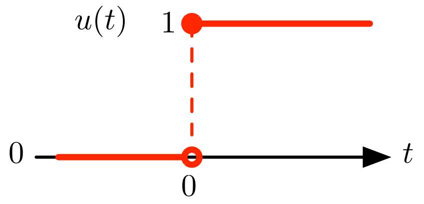
$$u(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ 1\,, & t \geq 0 \end{cases}$$

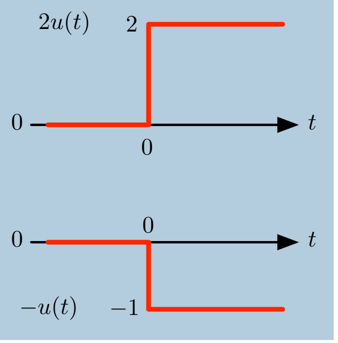
単位

単位ステップ関数

大きさ1　階段

ヘヴィサイド関数





公式2) 単位ステップ関数 u(t)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt \quad \leftarrow \text{定数1のラプラス変換} \\
&= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty \\
&= \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)}_{0} - \left(-\frac{1}{s}\overbrace{e^{-s\cdot 0}}^{1}\right) = \boxed{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

※ラプラス変換では，

ステップ関数と定数は同一視される．

p.15, 表2.1
公式2) に追加
u(t), 1

ラプラス変換運用の基本方針

変換表 -- 教科書p.15，表2.1

(1)変換／逆変換は変換表を活用

・公式1)〜6)は覚える

(2)定理との組み合わせ

・公式4)〜6) ⇒ 公式7)〜9)

(3)定義通りの積分計算

・どうしても必要な場合のみ（通常はやらない）

変換表　公式1) δ (t)

〈定義〉

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$$

$f(t)$：任意の関数

単位インパルス関数

1　衝撃

ディラックのデルタ関数

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty\,, & t = 0 \\ 0\,, & t \neq 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

← 形式的な書き方

$f(t) = 1$ のとき

単位

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1 \qquad (2.14)$$

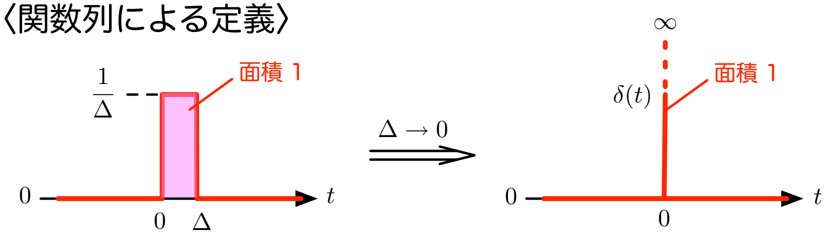
単位インパルス関数 δ(t)

※δ(t)は積分の中で意味を持つ.

※δ(t)は普通の関数ではない.

分布（distribution），超関数（hyperfunction）

〈関数列による定義〉



$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ … ラプラス変換における最も基本的な時間関数

公式6)　t^n　(nは自然数)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\left[-\frac{1}{s}t^n \mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty \left(-\frac{n}{s}t^{n-1}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} \\
&= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} \\
&= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{\mathcal{L}\{\overset{1}{t^0}\}}_{1/s} \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}
$$

$0! = 1$ と約束すれば，$n = 0$ でも成立

↓

定数1のラプラス変換に帰着

3. ラプラス変換の諸定理

複素領域の推移則

定理 d) 複素領域の推移則

変数 s　平行移動 シフト

$s \to s - a$

〈定理〉

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ のとき

$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}f(t)\} = F(s-a)$

$s \to s - a$ に書き換え

公式4) → 公式7)
公式5) → 公式8)
公式6) → 公式9)

公式10)は公式7)のバリエーション

例）公式4) → 公式7)

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t\} = F(s+a) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$