「制御工学」期末試験　問題・解答用紙 (その 1/4)

解答例

問題 1　図 1 の回路において，入力 $v_i(t)$ および出力 $v_o(t)$ である．以下の問いに答えなさい．[25]

(1) $v_o(t), v_i(t)$ に関する微分方程式 (回路方程式) を求めなさい．

図のように電流をおくと、
次の式が成り立つ。

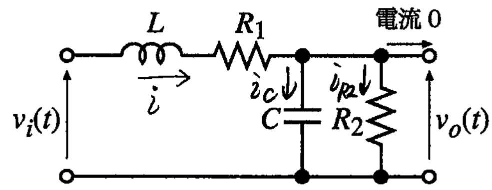


図 1

$$\begin{cases} i = i_C + i_{R2} & \cdots \text{KCL} \\ v_i = L\dfrac{di}{dt} + R_1 i + v_o & \cdots \text{KVL と枝の特性式} \\ v_o = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C\,dt = R_2 i_{R2} & \cdots \text{枝の特性式} \end{cases}$$

電流 i, i_C, i_{R2} を消去して、

$$v_i = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_2}\right) + R_1\left(C\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_2}\right) + v_o$$

$$LC\frac{d^2v_o}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_2}v_o = v_i$$

整理して、

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1+R_2}{LCR_2}v_o = \frac{1}{LC}v_i \quad \cdots \text{答}$$

(2) 伝達関数 $G(s)$ を求めなさい．

$\mathcal{L}\{v_i(t)\} = V_i(s)$, $\mathcal{L}\{v_o(t)\} = V_o(s)$ とおく。
伝達関数 $G(s)$ を求めるため、(1)の結果に初期値 0 でラプラス変換を施すと、

$$s^2V_o(s) + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)sV_o(s) + \frac{R_1+R_2}{LCR_2}V_o(s) = \frac{1}{LC}V_i(s)$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)s + \frac{R_1+R_2}{LCR_2}}$$

$$= \frac{1}{LCs^2 + \left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)s + \frac{R_1+R_2}{R_2}}$$

$$= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L+CR_1R_2}{R_1+R_2}s + \frac{LCR_2}{R_1+R_2}s^2} \quad \cdots \text{答}$$

学年：　　氏名：　　学籍番号：25　　22

「制御工学」期末試験　問題・解答用紙 (その 2/4)

問題 2　次の伝達関数 $G(s)$ について，以下の問いに答えなさい．[25]

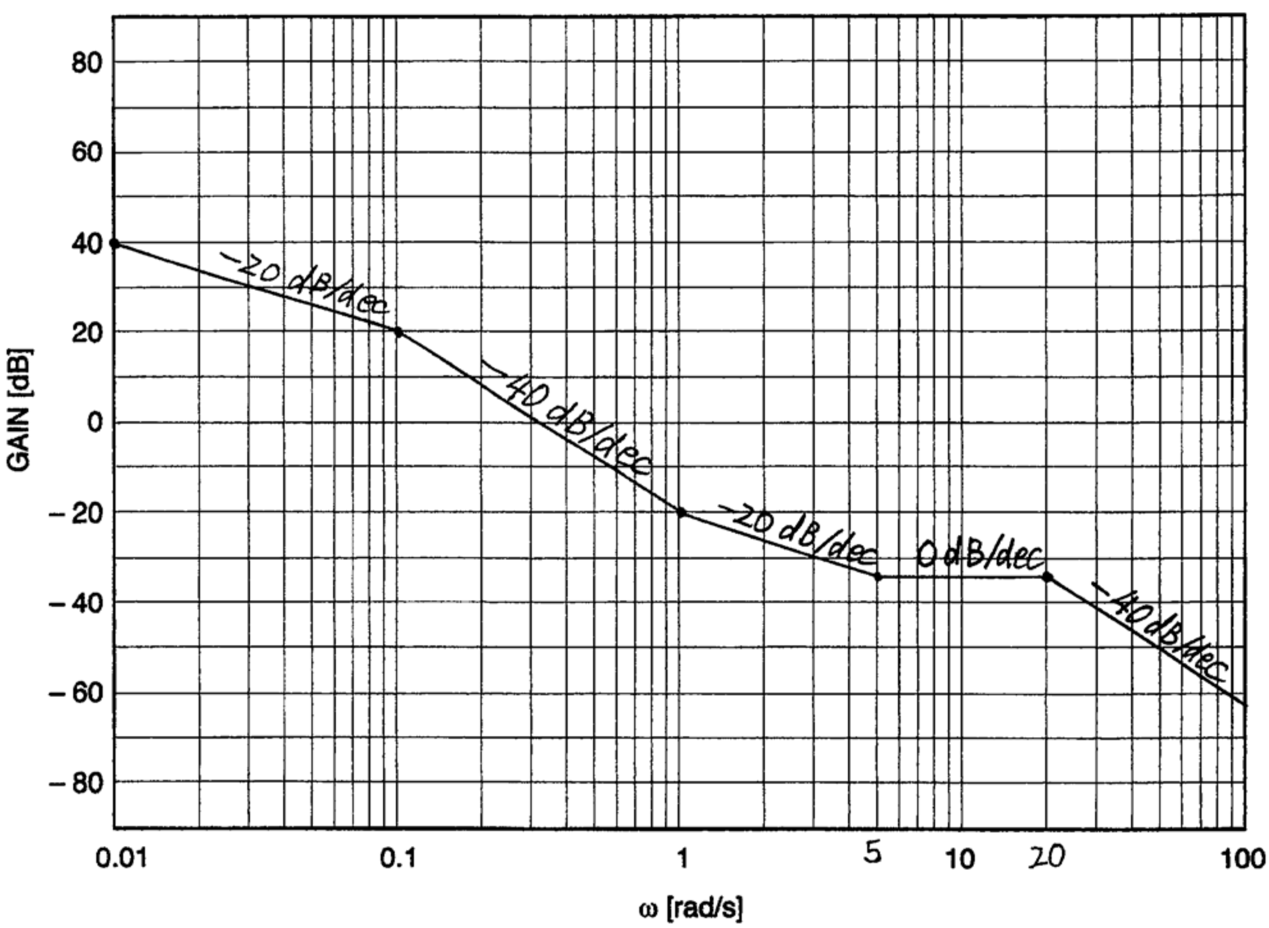
$$G(s) = \frac{(1+s)(1+0.2s)}{s(1+10s)(1+0.05s)^2}$$

(1) 周波数伝達関数を示しなさい．

$s \to j\omega$ の置き換えを行って、

$$G(j\omega) = \frac{(1+j\omega)(1+0.2j\omega)}{j\omega(1+10j\omega)(1+0.05j\omega)^2}$$

(2) ボード線図のゲイン特性を折れ線近似で描きなさい．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3$ とする．



・折れ点周波数

分母：0, 0.1, 20 [rad/s]

分子：1, 5 [rad/s]

・各区間の傾き

−20　−20　+20　+20　−40

0　−20　−40　−20　0　−40　傾き[dB/dec]

ω [rad/s]

0　0.1　1　5　20

分母　分母　分子　分子　分母

(2重)

・$\omega = 0.01$ [rad/s] における近似値

$$20\log_{10}|G(j\omega)|$$

$$\simeq 20\log_{10}\left|\frac{1}{0.01j}\right|$$

$$= 20\log 10^2$$

$$= 40\ [\mathrm{dB}]$$

学年：　　氏名：　　　　　　　　　　学籍番号：2 5 　 2 2

電気電子工学科３年生　　　　　　　　　　　　　　　　制御工学 (2015.8.7)

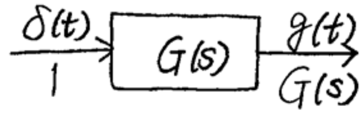
「制御工学」期末試験　問題・解答用紙 (その 3/4)

問題 3　伝達関数が次式で表される制御対象について，以下の問いに答えなさい．

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$$

(1) $K = 36$ のとき，インパルス応答 $g(t)$ を求めなさい．[15]

インパルス応答のラプラス変換は$G(s)$であるから、



$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{36(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$$

$G(s)$は次のように部分分数展開できる。

$$G(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3} \qquad (A, B, C, D\text{は定数})$$

各定数を決定する。

$$A = s^2 G(s)\Big|_{s=0} = \frac{36\cdot(0+1)}{2\cdot 3} = 6$$

$$B = \frac{d}{dt} s^2 G(s)\Big|_{s=0} = \frac{36(s+2)(s+3) - [(s+3)+(s+2)]\cdot 36(s+1)}{(s+2)^2(s+3)^2}\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{\cancel{36}\cdot 2\cdot 3 - \cancel{5\cdot 36}\cdot 1}{\cancel{2^2\cdot 3^2}} = 1$$

$$C = (s+2)G(s)\Big|_{s+2=0} = \frac{36(s+1)}{s^2(s+3)}\Bigg|_{s=-2}$$

$$= \frac{\overset{9}{\cancel{36}}\cdot(-1)}{\cancel{(-2)}^2\cdot 1} = -9$$

$$D = (s+3)G(s)\Big|_{s+3=0} = \frac{36(s+1)}{s^2(s+2)}\Bigg|_{s=-3}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{36}}\cdot(-2)}{\cancel{(-3)}^2\cdot(-1)} = 8$$

求めるインパルス応答$g(t)$は、

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{9}{s+2} + \frac{8}{s+3}\right\}$$

$$= \underline{\underline{6t + 1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} \quad (t \geqq 0)}}$$

学年：　　氏名：　　学籍番号：25　22

電気電子工学科３年生　　制御工学 (2015.8.7)

「制御工学」期末試験　問題・解答用紙 (その 4/4)

問題 3（続き）

(2) この制御対象を前向き経路にもつユニティフィードバック制御系を構築した．構築した制御系が安定となる K の範囲を求めなさい．※特性方程式を導き，ラウスの安定判別法を用いる．[15]

問題のユニティフィードバック制御系のブロック線図は右図のようになる。

一巡伝達関数はG(s)であり、特性方程式は、

$$1+G(s)=0$$

$$1+\frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}=0$$

$$s^2(s+2)(s+3)+K(s+1)=0$$

$$s^4+5s^3+6s^2+Ks+K=0$$

ラウスの安定判別法を用いて、安定判別を行う。

ラウスの数表は、

s^4	1	6	K
s^3	5	K	0
s^2	$\frac{5\times6-1\times K}{5}$	K	0
s^1	$\frac{\frac{30-K}{5}\times K-5\times K}{\frac{30-K}{5}}$		
s^0	K		

第1列は、$1, 5, \frac{30-K}{5}, \frac{(5-K)K}{30-K}, K$ である。安定であるための必要十分条件は、これらがすべて同符号であることから、

$$30-K>0,\ K>0,\ 5-K>0$$

これらの条件を整理すると、$0<K<5$。

問題 4

一巡伝達関数が次式で表される制御系の根軌跡を $0 \le K < \infty$ の範囲で描きたい．以下の問いに答え，解答図の根軌跡を完成させなさい．なお，分離点は $s=-0.435$ である．[20]

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)} \qquad (K\text{ は定数})$$

(1) 根軌跡の始点と終点を示しなさい．

始点（極）：$s=0,-1,-2,-4$ … 4本の軌跡

終点（零点）：$s=-3$

終点（無限遠点）：3本の軌跡

(2) 漸近線を示しなさい．

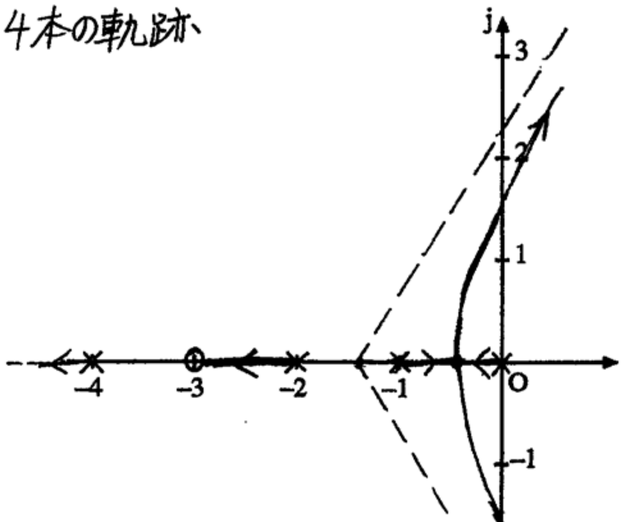
漸近線と実軸の交点：

$$C=\frac{(0-1-2-4)-(-3)}{4-1}=\frac{-7+3}{3}=-\frac{4}{3}$$

実軸となす角 α：

$$\alpha=-\frac{180^\circ+k\times360^\circ}{4-1}\quad(k=0,1,2)$$

$$=-60^\circ,-180^\circ,-300^\circ$$



解答図