2　「制御工学」補足資料

2.1　周波数応答

大きさ 1 の正弦波入力に対するシステムの応答を**周波数応答**と呼ぶ．一般に周波数応答は正弦波の角周波数 ω に応じて変化するので，周波数応答は ω の関数である．

2.1.1　周波数伝達関数

(定義)　伝達関数 $G(s)$ において，$s \to \mathrm{j}\omega$ の置き換えを行って得られる関数 $G(\mathrm{j}\omega)$ を**周波数伝達関数**と呼ぶ．

例)

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \Longrightarrow G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega + a}$$

補足　$G(\omega)$ と書かずに $G(\mathrm{j}\omega)$ と書くのは，$s \to \mathrm{j}\omega$ の対応関係を明確にするためである．また，$G(\mathrm{j}\omega)$ という表記により，これが複素数値をとる関数であることが明確になる．　□

周波数伝達関数はシステムの周波数応答を表す一つの方法である．周波数伝達関数と周波数応答は，同じ意味で用いることも多い．

なお，後で見るように，周波数伝達関数は電気回路の交流理論と密接な関係がある (この資料の 2.2.2 節)．

2.1.2　周波数伝達関数の数学的取り扱い (p.53)

周波数伝達関数 $G(\mathrm{j}\omega)$ は次のように 2 つの形式で表現できる (図 1)．

直交形式：　$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Re}\{G(\mathrm{j}\omega)\} + \mathrm{j}\mathrm{Im}\{G(\mathrm{j}\omega)\}$

極形式：　$G(\mathrm{j}\omega) = |G(\mathrm{j}\omega)|\angle G(\mathrm{j}\omega) = |G(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G(\mathrm{j}\omega)}$

複素数 $z = x + \mathrm{j}y$ の基本的な式：

実部：$x = \mathrm{Re}\{z\}$

虚部：$y = \mathrm{Im}\{z\}$

絶対値：$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

偏角：$\arg z = \angle z = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$

共役複素数：$\bar{z} = x - \mathrm{j}y$

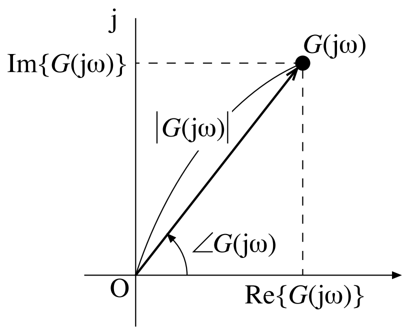


図 1: 複素平面上の $G(\mathrm{j}\omega)$

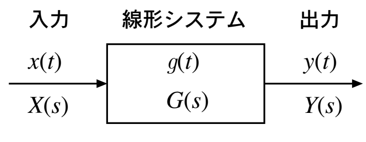
2.1.3　周波数伝達関数の物理的意味 (p.51)

周波数伝達関数の物理的な意味は次の通りである．

伝達関数 $G(s)$ をもつ線形システムにおいて，入力として角周波数 $\omega = \omega_0$ の適当な正弦波を加えると，出力も角周波数 ω_0 の正弦波となる．このとき，入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s)$，$Y(s)$ とおくと，次の関係が成り立つ．

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (\text{伝達関数の定義})$$

正弦波：時間 t の全領域 $(-\infty, \infty)$ で定義された定常正弦波を指す．



次に，$s \to \mathrm{j}\omega_0$ とすると，角周波数 $\omega = \omega_0$ における周波数応答 $G(\mathrm{j}\omega_0)$ に関して，次の関係が成り立つ．

$$G(\mathrm{j}\omega_0) = \frac{Y(\mathrm{j}\omega_0)}{X(\mathrm{j}\omega_0)}$$

この周波数応答の大きさと偏角は，

$$\begin{aligned} |G(\mathrm{j}\omega_0)| &= \left|\frac{Y(\mathrm{j}\omega_0)}{X(\mathrm{j}\omega_0)}\right| = \frac{|Y(\mathrm{j}\omega_0)|}{|X(\mathrm{j}\omega_0)|} \\ \angle G(\mathrm{j}\omega_0) &= \angle\left(\frac{Y(\mathrm{j}\omega_0)}{X(\mathrm{j}\omega_0)}\right) = \angle Y(\mathrm{j}\omega_0) - \angle X(\mathrm{j}\omega_0) \end{aligned}$$

2 つの複素数 z_1, z_2 の積と商に関する関係式：

絶対値：$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

偏角：$\angle(z_1 z_2) = \angle z_1 + \angle z_2$

$$\angle\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \angle z_1 - \angle z_2$$

すなわち，

- 周波数伝達関数の大きさは，**入出力の正弦波の大きさ（振幅）の比**
- 周波数伝達関数の偏角 (位相) は，**入出力の正弦波の位相差**

である．

補足 実際に実験で周波数応答を求める場合には，適当な大きさの正弦波をシステムに加え，入出力の正弦波の大きさの比と位相差をオシロスコープなどで測定 (時間領域での測定である) することが行われている． □

2.1.4 周波数応答の図的表現法

周波数応答の図的表現法の代表的なものとして，次の 4 つがある．

1. ナイキスト線図 (ベクトル軌跡)
2. ボード線図
3. ニコルス線図 (ゲイン位相図)

これらのうち，ボード線図は，工学の分野では最も広く用いられている図的表現法であり，この講義では主にボード線図を扱う．ナイキスト線図は制御系の安定判別で良く用いられ (教科書 p.84)，ニコルス線図は制御系の設計で用いられる (教科書 p.68)．

ナイキスト線図 ナイキスト線図は複素平面上に，角周波数 ω を変えながら $G(\mathrm{j}\omega)$ の描く軌跡をプロットしたものである．分かりやすい反面，縦続接続 (直列接続) のナイキスト線図が描きにくいという欠点がある．また，スケールが線形のため，描こうとする $|G(\mathrm{j}\omega)|$ の最大値と最小値の比が 10 倍を超えると，細部が十分に表せなくなるという点も欠点である．

ボード線図 ボード線図は，図 2 に示すように，横軸に周波数 (対数目盛) をとり，縦軸にゲイン (単位 [dB]，振幅比のデシベル表示) と位相 (単位 [°]，位相差) の 2 つをとったグラフ (ダブル Y グラフ) である．

ボード線図の最大の特長は，縦続接続のボード線図が描きやすいことである．実際，$G_1(\mathrm{j}\omega)G_2(\mathrm{j}\omega)$ という縦続接続の周波数伝達関数について，

$$\begin{aligned} (\text{ゲイン}) &= 20\log_{10}|G_1(\mathrm{j}\omega)G_2(\mathrm{j}\omega)| = 20\log_{10}|G_1(\mathrm{j}\omega)||G_2(\mathrm{j}\omega)| \\ &= 20\log_{10}|G_1(\mathrm{j}\omega)| + 20\log_{10}|G_2(\mathrm{j}\omega)| \\ (\text{位相}) &= \angle G_1(\mathrm{j}\omega)G_2(\mathrm{j}\omega) = \angle G_1(\mathrm{j}\omega) + \angle G_2(\mathrm{j}\omega) \end{aligned}$$

である．すなわち，縦続接続の場合，ボード線図ではゲイン・位相とも和をとるだけでよい．ボード線図のこの性質のおかげで，標準的な周波数伝達関数のゲイン特性を近似的に描くことが容易になる (この資料の 2.3.2 節)．

ゲインの計算については，次項を参照のこと．

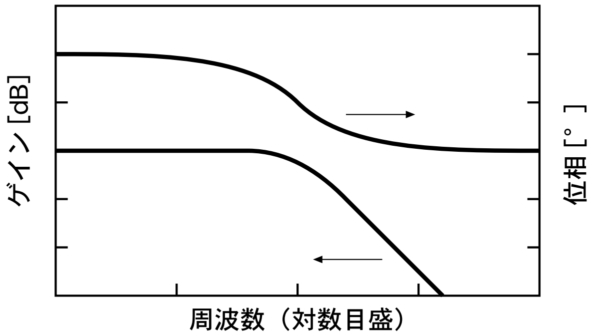


図 2: ボード線図（それぞれのプロットは矢印の指している y 軸目盛りで読む.）

2.1.5　復習：dB(デシベル) の計算について

システムの入力信号の大きさを $|X|$，出力信号の大きさを $|Y|$ とする．このとき，システムの周波数伝達関数 $G(\mathrm{j}\omega)$ の大きさ $|G(\mathrm{j}\omega)|$ は，次式で表される．

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|Y|}{|X|}$$

システムのゲイン (利得)N [dB] は次の式で計算される．

1. 入出力信号が電力，エネルギーの場合

$$N = 10\log_{10}\frac{|Y|}{|X|} = 10\log_{10}|G(\mathrm{j}\omega)| \text{ [dB]}$$

2. 入出力信号が上記以外の場合

$$N = 20\log_{10}\frac{|Y|}{|X|} = 20\log_{10}|G(\mathrm{j}\omega)| \text{ [dB]}$$

例えば，入出力信号が電圧や電流の場合には，対数の前の係数は 20 である．

制御工学では，特に断りのないかぎり，係数は 20 である．

このように異なる係数を用いる理由については，適当な教科書を参照のこと．

異なる係数を用いる理由：電気関係では常識に属する事項なので，知らない人は，電気回路，電子回路，通信工学の教科書などで各自調べること．

補足 単位 dB は，電気回路，電子回路，通信工学などの分野で広く用いられている．また，人の感覚は対数的な特性を持つことが多く，それらの数量化の際に単位 dB が用いられることがある． □

2.2　基本要素の周波数応答

教科書にそって，基本要素の周波数応答を見てゆこう．この資料では，基本要素に対応する電気システムも合わせて示す．

2.2.1　比例要素

$$G(\mathrm{j}\omega) = K \quad (K \text{ は正の実定数})$$

対応する電気システム：理想的な増幅器 ($K > 1$)，理想的な減衰器 ($K < 1$)
ゲイン：$20\log_{10}K$ [dB] $\cdots$ 定数，位相：0 [°]

2.2.2　1 次遅れ要素

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega T} \quad (T \text{ は正の実定数，時定数})$$

対応する電気システム： 図 3 の RC 回路

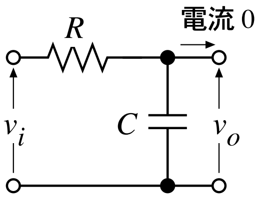


図 3: 1 次遅れ要素の例 (RC 回路)

ここで，交流理論を用いて，図 3 の RC 回路の入出力電圧比を求めてみよう．まず，v_i，v_o のフェーザ表示をそれぞれ V_i，V_o とおく．入出力電圧比 V_o/V_i は簡単なインピーダンス計算により，

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R + 1/\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

となって，この回路は 1 次遅れ要素として働くことが分かる．また，この RC 回路の時定数 T は，$T = RC$ である．

時定数 T の単位の関係：

$$T[\mathrm{s}] = R[\Omega]C[\mathrm{F}]$$

このように，電気回路の周波数応答は交流理論を用いて導くことが可能である．なお，出力電流を 0 と仮定するのは，後段の影響を無視して計算を簡単にするためである．実際の回路では，後段に接続する回路の影響が出る．

次に，ゲインおよび位相を近似的に求めてみよう．

- $\omega T \ll 1$ のとき
  周波数伝達関数の分母が $1 + \mathrm{j}\omega T \simeq 1$ と近似できて，全体は $G(\mathrm{j}\omega) \simeq 1$ と近似できる．
  ゲイン：$20\log_{10}|G(\mathrm{j}\omega)| \simeq 0$ [dB]，位相：$\angle G(\mathrm{j}\omega) \simeq 0$ [°]

- $\omega T \gg 1$ のとき
  周波数伝達関数の分母が $1 + \mathrm{j}\omega T \simeq \mathrm{j}\omega T$ と近似できて，全体は $G(\mathrm{j}\omega) \simeq 1/\mathrm{j}\omega T$ と近似できる．
  ゲイン：$20\log_{10}|G(\mathrm{j}\omega)| \simeq 20\log_{10}|1/\mathrm{j}\omega T| = -20\log_{10} T - 20\log_{10}\omega$ [dB]
  位相：$\angle G(\mathrm{j}\omega) \simeq -90$ [°]

  ゲインの式において，$-20\log_{10} T$ は定数である．また，ボード線図の横軸は対数目盛 ($\log_{10}\omega$) なので，$-20\log_{10}\omega$ の項は傾き -20 [dB/dec] の直線を意味する．

  ここで，[dB/dec] は，周波数が 10 倍になるときのゲインの変化を表す単位である．“dec” は “decade” の略で，“10” を意味する．

- $\omega T = 1$ のとき
  ゲイン：$20\log_{10}|G(\mathrm{j}\omega)| = 20\log_{10}|1/(1+\mathrm{j})| = 20\log_{10} 1/\sqrt{2} = -10\log_{10} 2 \simeq -3.010$ [dB]
  位相：$\angle 1/(1+\mathrm{j}) = -45$ [°]

以上の結果をまとめると，周波数が高くなるにつれ，ゲインは 0 [dB] から約 -3 [dB] を経由して -20 [dB/dec] の傾きの直線へ漸近し，位相は 0 [°] から -45 [°] を経由して -90 [°] へ漸近することが分かる．位相が負になることは**遅れ**を意味する．

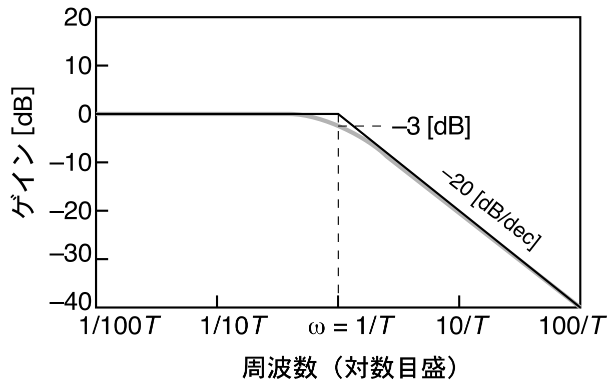


図 4: 1 次遅れ要素のゲイン特性

1 次遅れ要素のゲイン特性は図 4 のようになる (電気回路では 1 次の低域通過フィルタの特性)．実線が折れ線近似，グレーの線が正確な特性である．

注意 折れ点周波数 ($\omega T = 1$) におけるゲインを -3 [dB] と表記することが良く行われる．この値は近似値であるので，このまま理論的な計算に用いると失敗する．理論的な計算では，折れ点周波数における (対数をとる前の) ゲインが $1/\sqrt{2}$ に落ちるという事実を利用する必要がある．同様にして，ゲイン特性の傾きを 6 [dB/oct] の倍数 $(\ldots, -12, -6, 6, 12, \ldots)$ で表記することも行われるが，この値も近似値である． □

[dB/oct] は，周波数が 2 倍になるときのゲインの変化を表す単位である．“oct” は “octave” の略で，“周波数比 2 倍” を意味する．[dB/dec] を用いた表記との間には，次の関係がある．

$$6 \text{ [dB/oct]} = 20 \text{ [dB/dec]}$$

2.2.3 復習：近似の考え方

簡単な式 $y(x) = 1 + x$ において，$x \ll 1$ のとき $y(x) \simeq 1$ と，$x \gg 1$ のとき $y(x) \simeq x$ と，近似できる．ここで，$x \ll 1$ は，“x 十分小なり 1” と読み，x と 1 の大きさを比べたとき，x の方が十分小さい，ということを意味する．$x \gg 1$ についても同様である．

普通の不等号と異なり，$\ll$，$\gg$ の使用には統一的な基準が存在しない (近似したい式と必要な近似の精度に依存) が，経験的には一桁以上大きさが違えば使ってもよいとされている．

2.2.4 2 次比例要素

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(\mathrm{j}\omega/\omega_n) + (\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2}$$

(ζ は 0 か正の実定数，減衰率；ω_n は正の実定数，固有角周波数)

対応する電気システム： 図 5 の RLC 回路

ζ: ツェータ，ゼータ，ジータ

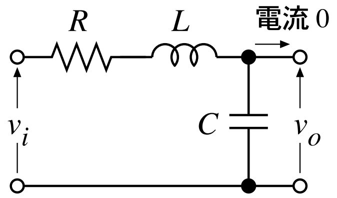


図 5: 2 次比例要素の例 (RLC 回路)

1 次遅れ要素と同様に近似すると，周波数が高くなるにつれ，ゲインは 0 [dB] から -40 [dB/dec] の傾きの直線へ漸近し，位相は 0 [°] から -180 [°] へ漸近することが分かる．

2.2.5 微積分要素

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^N}$$

(N は積分の回数．N が正の整数，積分要素；N が負の整数，微分要素)

対応する電気システム：積分回路，微分回路．

ゲイン：$-20N\log_{10}\omega$ [dB] ⋯ 傾き $-20N$ [dB/dec] の直線

位相：$-90N$ [°]

単に "積分要素" と言った場合，$N=1$ の場合を指すことが多い．積分回路は，演算増幅器を用いて良い性能のものを実現できる．良い微分回路 (周波数が高くなるほど高ゲイン) を実現するのは難しいので，通常は積分要素だけで制御系を構成する．

演算増幅器：OP アンプ，オペアンプとも呼ばれる．詳細については，電子回路の教科書を参照のこと．

2.2.6 1 次微分要素

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega T}{1+\mathrm{j}\omega T} \quad (T \text{ は正の実定数，時定数})$$

対応する電気システム： 図 6 の RC 回路

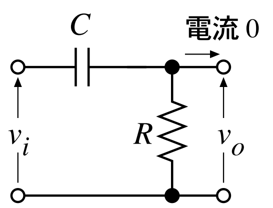


図 6: 1 次微分要素の例 (RC 回路)

1 次遅れ要素と同様に近似すると，周波数が高くなるにつれ，ゲインは傾き 20 [dB/dec] の漸近線から約 -3 [dB] を経由して 0 [dB] へ漸近し，位相は 90 [°] から 45 [°] を経由して 0 [°] へ漸近することが分かる．位相が正になることは**進み**を意味する．

2.2.7 むだ時間要素

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L} \quad (L \text{ は正の実定数，むだ時間})$$

対応する電気システム：遅延回路．

むだ時間要素の周波数伝達関数は，時間領域の推移則 (教科書 p.16) から導き出される．むだ時間 L は，入力に対する出力の遅れ時間である．また，入出力の波形はむだ時間 L だけの遅れを除き，同じである．

オイラーの公式から，むだ時間要素の周波数伝達関数は，

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L} = \cos\omega L - \mathrm{j}\sin\omega L$$

となる．

ゲイン：$20\log_{10}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}| = 20\log_{10}1 = 0$ [dB]

位相：$\angle\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L} = -\omega L$ [rad]

すなわち，むだ時間要素の位相は角周波数に比例する（線形位相）．ただし，横軸が対数目盛のボード線図上では直線にならない．

2.3 ボード線図のゲイン特性の描き方

2.3.1 実際の制御系の周波数応答

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K\prod(1+\mathrm{j}T\omega)\prod[1+2\zeta(\mathrm{j}\omega/\omega_n)+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]}{(\mathrm{j}\omega)^N\prod(1+\mathrm{j}T\omega)\prod[1+2\zeta(\mathrm{j}\omega/\omega_n)+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}$$

ここで，積の記号 $\prod$ は，$\prod(1+\mathrm{j}T\omega)=(1+\mathrm{j}T_1\omega)(1+\mathrm{j}T_2\omega)\cdots(1+\mathrm{j}T_m\omega)$ というほどの意味で使っている．分母・分子に同じ形の式が現れているが，それぞれの T,ζ,ω_n には別の値が入るので約せないことに注意．

Π：パイ（ギリシャ文字 π の大文字）

この形の周波数応答 $G(\mathrm{j}\omega)$ において，微積分要素が含まれない場合 $(N=0)$，$\omega=0$（直流を意味する）とおくと，

$$G(0)=K$$

である．すなわち，比例要素 K は直流ゲインを表している．

2.3.2 ボード線図のゲイン特性を折れ線近似で描く

次のような手順でゲイン特性を折れ線近似で描くことができる．

1. 既約分数の形にする．
2. 標準形にする．
   - 比例要素の掃き出し．
   - $1+\mathrm{j}T\omega, 1+2\zeta(\mathrm{j}\omega/\omega_n)+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2$ という形にする．
     例) $\dfrac{1}{a+\mathrm{j}T\omega} \Longrightarrow \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\frac{T}{a}\omega}$

   ※ 1, 2 の手続きは，上の $G(\mathrm{j}\omega)$ の形に変形するためのもの．
   ※掃き出された比例要素は，K に集約される．
   ※むだ時間要素 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}$ は，ゲイン特性に影響を与えない $(|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}|=1)$.
3. 折れ点周波数を拾い出し低いほうから並べる．
   - 微積分要素の折れ点周波数は 0 と考える．
4. 各周波数における折れ線の傾きを考えて，ゲインを描く．
   - 折れ線の傾きは 0 dB/dec から始める．
   - 周波数の低いほうから見て行き，折れ点周波数に出会うたびに，折れ線の傾きを
     分子の折れ点周波数 — +20 dB/dec
     分母の折れ点周波数 — −20 dB/dec
     だけ変える．
   - 折れ点周波数が重なっている場合は，重なりの数だけ加える．
     例) 分母に $(1+\mathrm{j}T\omega)^2$ — −40 dB/dec の変化
   - 微積分要素がある場合には，ある特定の角周波数 (通常，グラフのもっとも低い角周波数) についてゲインを計算 (近似計算) する．
   - 折れ線の上に傾き (−20 dB/dec など) を記入する．

発展 位相特性については，**最小位相推移系**ならばゲイン特性から計算できるので，その場合の系のおおまかな特性はゲイン特性だけで把握できる． □

最小位相推移系：同じゲイン特性を持つ系（システム）の中で位相遅れが最小のもの．この講義では深く立ち入らないが，詳細について知りたければ，シラバスに挙げた参考書等で確認のこと．

例題 次の周波数伝達関数 $G(\mathrm{j}\omega)$ のゲイン特性を折れ線近似で描きなさい．

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1 + \mathrm{j}10\omega}{\mathrm{j}\omega(1 + \mathrm{j}0.1\omega)}$$