1 「制御工学」補足資料

1.1 たたみ込み (合成積)

実数の全領域 $(-\infty, \infty)$ で定義された 2 つの関数 f, g に対して，**たたみ込み**$f * g$ を次式で定義する．

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1·1}$$

たたみ込み $f * g$ は，式 (1·1) の場合，変数 t の関数であり，正式には $(f * g)(t)$ と書く．しかし，変数の名前は式より明らかであるので，この資料では簡単に $f * g$ と書くことにする．

ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1·2}$$

より，一般に次の関係が成り立つ．

$$f * g = g * f \tag{1·3}$$

結合律 $(f * g) * h = f * (g * h)$ も成り立つなど，たたみ込みは積の性質を持ち，合成積とも呼ばれる．

1.2 フーリエ変換におけるたたみ込み

実数の全領域 $t : (-\infty, \infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対するフーリエ変換 $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$ を次式で定義する．

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1·4}$$

フーリエ変換 $F(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, G(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ が存在すれば，たたみ込みのフーリエ変換について

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega) \tag{1·5}$$

が成り立つ．

たたみ込みは，フーリエ変換により通常の積になる．証明は応用数学の教科書を参照のこと．

1.3 ラプラス変換におけるたたみ込み

ラプラス変換においては，たたみ込みの対象となる関数 $f(t), g(t)$ の $t < 0$ おける値はいずれも 0 である．すなわち，

$$f(t) = \begin{cases} 0\,,\ t < 0 \\ f(t)\,,\ t \geq 0 \end{cases}\,,\ g(t) = \begin{cases} 0\,,\ t < 0 \\ g(t)\,,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{1·6}$$

実際，因果的 (物理的に実現可能) なシステムでは，インパルス応答は必ずこのような性質を持つ．

この点を考慮すると，ラプラス変換におけるたたみ込み $f * g$ は次式で表される．

$$f * g = \int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} g(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1·7}$$

たたみ込みを用いて，線形システムの入出力関係は，次のように表される (教科書 p.23，式 (2.76))．

$$y(t) = g * x = \int_{0}^{t} g(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1·8}$$

ここで，$x(t)$ はシステムへの入力，$g(t)$ はシステムのインパルス応答，$y(t)$ はシステムの出力である．この式の両辺にラプラス変換を施すと，次式を得る (教科書 p.24，式 (2.78))．

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{g * x\} = \int_{t=0}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t} g(t-\tau)x(\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{1·9}$$

この式が，フーリエ変換の場合と同じ結果 (式 (1·5) に相当) になることを以下に示す．

まず，$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ とおく．計算するたたみ込みのラプラス変換は，

$x(\tau)$ と $g(t-\tau)$ の積の順序を入れ替えている．

$$Y(s) = \mathcal{L}\{g * x\} = \int_{t=0}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t} x(\tau)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \qquad (1{\cdot}10)$$

この積分の積分範囲は，$0 \le t \le \infty$ かつ $0 \le \tau \le t$ である (図 1(a) の網かけ部).

次に，積分の順序を入れ替え，図 1(b) の数字に示す順に積分を行う．図 1(b) から，積分変数 t の下端が $t=\tau$，積分変数 τ の上端が $\tau = \infty$ になることに注意すると，式は，

$$\mathcal{L}\{g * x\} = \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\int_{t=\tau}^{\infty} g(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \qquad (1{\cdot}11)$$

となる．

さらに，変数変換 $t' = t - \tau$ を行うと，積分範囲は図 2(a) の網かけ部から図 2(b) の網かけ部に変換される．積分範囲が，$\tau : [0, \infty)$，$t' : [0, \infty)$ に変わることに注意すると，最終的に以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g * x\} &= \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\int_{t'=0}^{\infty} g(t')\mathrm{e}^{-s(t'+\tau)}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\tau & (1{\cdot}12)\\
&= \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\int_{t'=0}^{\infty} g(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\tau & (1{\cdot}13)\\
&= G(s)\int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau & (1{\cdot}14)\\
&= G(s)X(s) & (1{\cdot}15)
\end{aligned}$$

すなわち，**たたみ込みのラプラス変換は，それぞれの関数のラプラス変換の積である**．

重積分の積分順序の入れ替えや変数変換には，十分に気をつかう必要がある．

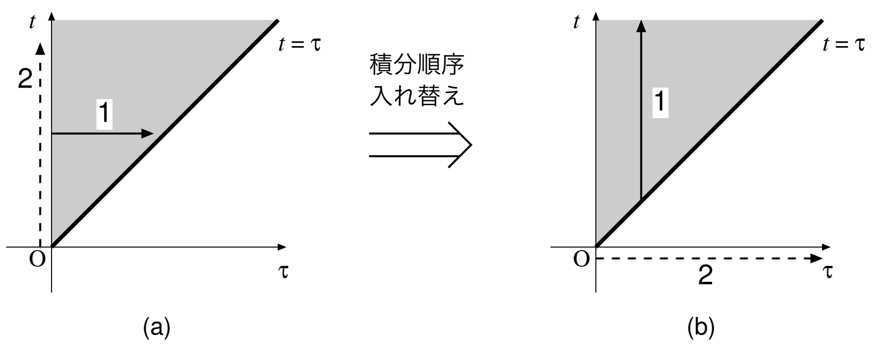

図 1: 積分順序の入れ替え

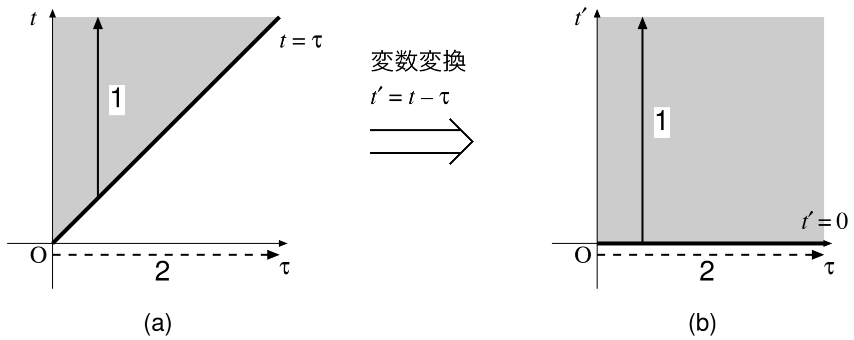

図 2: 変数変換 ($t' = t - \tau$)